Moderne Modellordnungsreduktionsverfahren für Finite-Elemente-Modelle zur Simulation von Werkzeugmaschinen
Modern Methods for Model Order Reduction of Finite Element Models for the Simulation of Machine Tools

Dipl.-Ing. Thomas Bonin, TU München, Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften (*iwb*), Boltzmannstr. 15, 85747 Garching, Deutschland, thomas.bonin@iwb.tum.de
Dipl.-Math. Andreas Soppa, TU Braunschweig, Institut *Computational Mathematics*, AG Numerik, 38023 Braunschweig, Deutschland, a.soppa@tu-bs.de
Dr. rer. nat. Jens Saak, Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme, Sandtorstr. 1, 39106 Magdeburg, saak@mpi-magdeburg.mpg.de
Prof. Dr.-Ing. Michael F. Zäh, TU München, Institut für Werkzeugmaschinen und Betriebswissenschaften (*iwb*), Boltzmannstr. 15, 85747 Garching, Deutschland, michael.zaeh@iwb.tum.de
Prof. Dr. rer. nat. Heike Faßbender, TU Braunschweig, Institut *Computational Mathematics*, AG Numerik, 38023 Braunschweig, Deutschland, h.fassbender@tu-bs.de
Prof. Dr. rer. nat. Peter Benner, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 09107 Chemnitz, Deutschland, benner@mathematik.tu-chemnitz.de

Kurzfassung

Moderne Werkzeugmaschinen sind komplexe mechatronische Produktionssysteme, deren Entwicklung unter enormen Innovations-, Zeit- und Kostendruck stattfindet. Die Simulationstechnik stellt hierbei eine Schlüsseltechnologie zur frühzeitigen Verifikation des Verhaltens der Werkzeugmaschine dar. Ein effizienter Ansatz zur Abschätzung der erreichbaren Leistungsfähigkeit, der Genauigkeit und auch der Prozesstauglichkeit eines Maschinenentwurfs ist die Kopplung von Finite-Elemente-(FE)-Modellen der mechanischen Strukturkomponenten mit der regelungstechnischen Simulation der elektrischen Antriebssysteme. Um das dynamische Verhalten der Maschine möglichst exakt abbilden und die Eigenfrequenzen des realen Systems vorhersagen zu können, wird häufig eine sehr feine Diskretisierung durch finite Elemente gewählt, was zu sehr großen Dimensionen der Koeffizientenmatrizen der allgemeinen Bewegungsgleichungen führt. Diese werden einer Ordnungsreduktion unterzogen, um ein effizient zu berechnendes Verhaltensmodell für die Zeitbereichssimulation zu erhalten. Wir untersuchen hier moderne systemtheoretische Verfahren, die gegenüber der klassischen modalen Analyse Vorteile hinsichtlich der Genauigkeit des reduzierten Modells sowie der Automatisierung des Reduktionsprozesses aufweisen und sich gut für den Einsatz im geschlossenen Regelkreis eignen.

Abstract

Modern machine tools are complex mechatronic production systems. Their development is characterized by an enormous pressure of time and costs and the need of innovation. Simulation technology allegorizes a key technology for the verification of the machine behavior during the early development phases. An efficient approach to estimate the capability, precision and process suitability is the coupled simulation of the finite element model of the mechanical structure and the model of the axis control system. Due to the finite element discretization, large systems of equations occur and model order reduction is required to make calculation time reasonable. In this paper, modern methods for model order reduction based on systems theoretic considerations will be analyzed regarding their use in structural mechanics and the simulation of machine tools.

1 Einleitung

Moderne Werkzeugmaschinen sind komplexe mechatronische Produktionssysteme, deren Entwicklung unter enormen Innovations-, Zeit- und Kostendruck stattfindet. Die Simulationstechnik stellt hierbei eine Schlüsseltechnologie zur frühzeitigen Verifikation des Verhaltens der Werkzeugmaschine dar. Ein effizienter Ansatz zur Abschätzung der erreichbaren Leistungsfähigkeit, der Genauigkeit und auch der Prozesstauglichkeit eines Maschinenentwurfs ist die Kopplung von Finite-Elemente-(FE)-Modellen der mechanischen Strukturkomponenten (Bild 1) mit der regelungstechnischen Simulation der elektrischen Antriebssysteme.

Um das dynamische Verhalten der Maschine möglichst exakt abbilden und die Eigenfrequenzen des realen Systems vorhersagen zu können, wird häufig eine sehr feine Diskretisierung durch finite Elemente gewählt, was zu sehr großen Dimensionen der Koeffizientenmatrizen der allgemeinen Bewegungsgleichungen führt. Diese werden einer Ordnungsreduktion unterzogen, um ein effizient zu berechnendes Verhaltensmodell für die Zeitbereichssimulation zu erhalten. Die klassischen Ansätze dieser Reduktion wie beispielsweise die modale Reduktion, die Kondensationsverfahren oder die *Component Mode Synthesis* basieren auf der Lösung des zugehörigen Eigenwertproblems, um mit Hilfe der gewonnenen Modalmatrix das Originalsystem auf einen deutlich kleineren, modalen Raum zu projizieren.

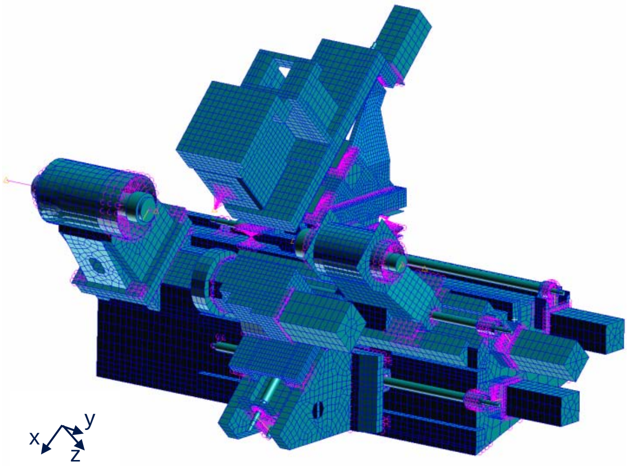

Bild 1: Finite-Elemente-Modell einer modernen Werkzeugmaschine

Diese Methoden sind aber häufig durch lange Berechnungszeiten und einen ggf. signifikanten Qualitätsverlust im statischen Bereich aufgrund der Vernachlässigung von Eigenmoden gekennzeichnet. Darüber hinaus sind sie nur schwer automatisierbar, nicht in der Lage vorgegebene Fehlerschranken einzuhalten und berücksichtigen keine Ein- und Ausgangsgrößen, die vor allem für die gekoppelte Simulation mit Modellen der regelungstechnischen Komponenten von Bedeutung sind.

Mit Hilfe moderner mathematischer Methoden wurden in den letzten Jahren neue systemtheoretische Ansätze der Modellordnungsreduktion entwickelt und bereits erfolgreich angewendet. Diese sind durch ihre automatische und schnelle Reduktion der Dimension der Bewegungsgleichungen unter höchsten Qualitätsansprüchen gekennzeichnet. Gleichzeitig sind sie in der Lage, das System unter Berücksichtigung vorgegebener Fehlerschranken zu reduzieren. Zu diesen Methoden gehören auch die in diesem Beitrag diskutierten Krylov-Unterraumverfahren sowie der Ansatz des Balancierten Abschneidens (BTA - Balanced Truncation Approximation), dessen Anwendung auf die Werkzeugmaschinensimulation z.B. in [3] diskutiert wird.

Diese Reduktionsverfahren erstellen das reduzierte System durch Approximation der Übertragungsfunktionen des Modells, wodurch sie auch in der Lage sind, sogenannte MIMO-(Multiple Input Multiple Output)-Systeme zu reduzieren. Dies stellt einen besonderen Vorteil für die Einbindung der Reduktionstechniken in CAE-Systeme bzw. für die Mechatroniksimulation (gekoppelte Simulation von Strukturmodell mit dem regelungstechnischen Modell der elektromechanischen Antriebssysteme) von Werkzeugmaschinen dar.

In diesem Beitrag wird die Entwicklung und Anpassung moderner Ordnungsreduktionsmethoden für deren Anwendung auf strukturmechanische Modelle von Werkzeugmaschinen vorgestellt. Dabei wird auf die Reduktion von MIMO-Systemen, neue Algorithmen für höchste Effizienz und Selbstanpassung an die Eigenschaften des Modells sowie die Vorteile gegenüber den klassischen modalen Methoden eingegangen. Die erstellten reduzierten Systemmodelle können einerseits im Frequenzbereich analysiert, andererseits in die regelungstechnische Umgebung der Lageregler der Vorschubachsen eingebettet und im Zeitbereich simuliert werden.

2 Modellreduktion in der Simulation von Werkzeugmaschinen

Um die Eigenschaften von Werkzeugmaschinen mit der erforderlichen Genauigkeit voraussagen zu können, wird heute unter anderem die Finite-Elemente-Methode (FEM) als numerisches Standardverfahren angewendet. Zur Beschreibung des Bewegungsverhaltens der Maschinenstruktur aufgrund der wirkenden Kräfte wird die komplexe geometrische Struktur im Modell durch eine diskrete Darstellung mittels finiter Elemente in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführt [10]. Die kontinuierliche Geometrie wird somit durch eine endliche Anzahl von Knoten im Elemente-Netz repräsentiert, wie es in Bild 1 ersichtlich ist. Die kontinuierliche Bewegung wird im Inneren der Elemente durch Verschiebungsansätze linearer oder polynomialer Ordnung beschrieben. Durch die Zuordnung der Elementtypen zu den Elementen im Knotennetz werden die Steifigkeits- und Masseneigenschaften der Elemente definiert. Daraus lassen sich die Koeffizientenmatrizen der Bewegungsgleichungen ableiten. Die resultierenden Gleichungen linearer FEM-Modelle beschreiben die Verformungen kontinuierlicher Strukturen, beschränken sich aber auf „kleine“ Verschiebungen, wie sie bei elastischen Verformungen, z.B. Schwingungen auftreten. Große Führungsbewegungen werden in dieser Darstellung nicht erfasst.

Das entstandene, aus dem FEM-Solver ausgeleitete Gleichungssystem beschreibt die Maschinenstruktur zunächst ohne Dämpfungseinflüsse. Die Prognose und Modellierung des Dämpfungsverhaltens von komplexen Strukturen wie Werkzeugmaschinen ist heute noch nicht ausreichend möglich und ist Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten [8]. Aus diesem Grund wird die Dämpfung i.d.R. mit Hilfe globaler Ansätze, wie z.B. Rayleigh-Dämpfung, nachträglich dem Gleichungssystem hinzugefügt, wodurch sich ein gedämpftes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung ergibt:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) &= Bu(t) \\ y(t) &= C_p x(t) + C_v \dot{x}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

wobei $M, D, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $C_p, C_v \in \mathbb{R}^{q \times n}$. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ist der Zustandsvektor des Systems und stellt die Verschiebungen dar, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ wird als

Eingang und $y(t) \in \mathbb{R}^q$ als Ausgang des Systems bezeichnet.
Da dieses hochdimensionale System für die Lösung im Zeitbereich oder in der gekoppelten Simulation einen erheblichen, unter industriellen Aspekten nicht vertretbaren Zeitaufwand erfordert, muss es mit Hilfe der Ordnungsreduktion in ein effizient zu berechnendes Modell überführt werden. Im folgenden Abschnitt werden ausgewählte Reduktionsverfahren und deren Funktionsweise genauer erläutert.

3 Methoden zur Modellordnungsreduktion

Das Ziel der Ordnungsreduktion ist es, ein Gleichungssystem mit kleiner Dimension zu finden, das die Berechnung einer Lösung des Systems mit geringem Zeit- und Speicheraufwand ermöglicht und dabei die Eigenschaften des Originalsystems möglichst gut approximiert. Hierfür wurden bislang die sogenannten modalen Verfahren verwendet, die auf der Lösung des durch Masse- und Steifigkeitsmatrix definierten Eigenwertproblems beruhen, um damit das Originalsystem mit Hilfe der Modalmatrix auf einen deutlich kleineren, modalen Raum zu projizieren. Daneben gibt es mathematische Verfahren, wie beispielsweise die Krylov-Unterraum-basierten Verfahren zur Ordnungsreduktion, welche gegenüber den klassischen einige Vorteile aufweisen. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Ansätze kurz vorgestellt.

3.1 Modale Reduktion

Die modalen Verfahren bedienen sich der Vorstellung, dass sich die durch äußere Kräfte hervorgerufenen Verformungen der Struktur durch eine gewichtete Überlagerung von Eigenschwingformen des Systems, den sogenannten Eigenmoden, darstellen lassen. Die Koeffizientenmatrizen des Originalsystems besitzen eine bestimmte Bandbreite, die wiederum den Kopplungsgrad der Gleichungen im System bestimmt. Um zu einem entkoppelten Gleichungssystem zu gelangen, in welchem jede Gleichung eine Strukturmode beschreibt, ist der Übergang auf verallgemeinerte Koordinaten nötig, in welchen eine Diagonalstruktur der Matrizen erzeugt wird [10]. Hierfür muss ein Ähnlichkeitsoperator Φ gesucht werden, mit dessen Hilfe die Knotenverschiebungen $x(t)$ in Abhängigkeit der verallgemeinerten Verschiebungen $q(t)$ angegeben werden können:

$$x(t) = \Phi q(t) \tag{2}$$

Für die Berechnung des Operators Φ wird die homogene Gleichung des konservativen Systems

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0 \tag{3}$$

betrachtet. Die Dämpfungsmatrix kann im Falle eines proportional gedämpften Systems zunächst vernachlässigt werden, da die zu berechnenden Eigenvektoren mit denen des gedämpften Systems übereinstimmen. Einsetzen von $x = e^{j\omega t}$ in Gleichung (3) ergibt das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0. \tag{4}$$

Theoretisch ergeben sich durch Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\omega^2) = \det(K - \omega^2 M) \tag{5}$$

die Eigenwerte ω_i^2, wobei ω_i die i-te Eigenfrequenz genannt wird. Das Einsetzen der Eigenwerte in Gleichung (4) liefert die zugehörigen Eigenvektoren ϕ_i, welche auch Eigenmoden genannt werden. In der Praxis werden die Eigenwerte jedoch aus Stabilitäts- und Effizienzgründen mit numerischen Näherungsverfahren bestimmt. Nach der Normierung durch Einführung einer Massen-Orthonormalität können die Eigenvektoren ϕ_i spaltenweise zur Eigenvektor- oder Modalmatrix Φ und die Eigenwerte ω_i^2 zur diagonalen Eigenwertmatrix zusammengefasst werden:

$$\Phi = [\phi_i, ..., \phi_n] \quad \text{und} \quad \Omega^2 = \mathrm{diag}(\omega_i^2). \tag{6}$$

Für die Projektion in den kleineren, modalen Raum wird demnach die Modalmatrix Φ verwendet. Aufgrund der Massen-Orthonormalität ist die modale Massenmatrix $\tilde{M} = \Phi^T M \Phi = I$ und die modale Steifigkeitsmatrix $\tilde{K} = \Phi^T K \Phi = \Omega^2$, wodurch ein entkoppeltes Gleichungssystem von Ein-Massen-Schwingern entsteht. Die modale Dämpfungsmatrix kann dem System entweder wieder durch einen linear-proportionalen Ansatz hinzugefügt werden oder durch Verwendung Lehr‘scher Dämpfungsmaße der einzelnen Strukturmoden.
Unter Verwendung der Modalmatrix kann das Originalsystem auf einen kleineren, den modalen Raum projiziert und somit eine Modellreduktion erreicht werden. Die zu Grunde liegende Idee besteht in der Darstellung der modalen Übertragungsfunktion als Reihe mit nach den Eigenfrequenzen geordneten Gliedern. Die optimale Approximation des Originalsystems kann aber lediglich durch Berechnung und Berücksichtigung sämtlicher Eigenfrequenzen und -vektoren erreicht werden, was zu sehr langen Berechnungszeiten führen würde. Aus diesem Grund wird für die Transformation eine Auswahl der vorher bestimmten Strukturmoden verwendet, meist werden Systemanteile ab einer bestimmten Frequenz vernachlässigt (modales Abschneiden).
Eine weitere Möglichkeit besteht in der Auswahl relevanter Moden mit dominantem Anteil am Systemverhalten. Hierbei besteht eine Gefahr, wenn relevante Strukturmoden fälschlicherweise nicht berücksichtigt wurden. In [9] wird ein Ansatz zur Bestimmung von Dominanzmaßen einzelner Eigenformen diskutiert, [7] stellt eine Möglichkeit vor, den einzelnen Eigenmoden Beiträge zur $\mathcal{H}_2$- oder $\mathcal{H}_\infty$-Norm zuzuordnen, wodurch sich der Fehler für das reduzierte System bezüglich dieser Normen angeben lässt. Um eine wirklich gute Approximation des Originalsystems zu erreichen, werden allerdings sehr viele Eigenformen benötigt. Die Ursache liegt darin, dass in den Moden keine Information bezüglich der räumlichen Verteilung der wirkenden Kräfte enthalten ist [6].
Darüber hinaus bleiben weitere Defizite des Reduktionsverfahrens bestehen. Einerseits weist das Vorgehen zur

Erstellung des reduzierten Systemmodells mit der Lösung des verallgemeinerten Eigenwertproblems und anschließender Auswahl relevanter Anteile der Modalmatrix Optimierungspotenzial hinsichtlich der Effizienz des Vorgehens auf. Zum anderen besteht die Problematik, dass der Fehler gegenüber dem Originalsystem stets erst nach der Reduktion des Modells, bei sehr großen Modellen u. U. auch gar nicht bestimmt werden kann.

3.2 Krylov-Unterraum-Verfahren

Bei den Verfahren zur Ordnungsreduktion, die auf Krylov-Unterraum-Methoden basieren, handelt es sich ebenfalls um Projektionsverfahren. Der Unterschied zur modalen Reduktion besteht jedoch darin, dass eine Projektionsmatrix $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$ durch eine mathematische Systembewertung bestimmt wird, mit deren Hilfe das reduzierte System

$$\begin{aligned} \tilde{M}\ddot{\tilde{x}} + \tilde{D}\dot{\tilde{x}} + \tilde{K}\tilde{x} &= \tilde{B}u \\ \tilde{y} &= \tilde{C}_p\tilde{x} + \tilde{C}_v\dot{\tilde{x}} \end{aligned} \tag{7}$$

mit

$$\begin{gathered} \tilde{M} = V^T MV,\ \tilde{D} = V^T DV,\ \tilde{K} = V^T KV \in \mathbb{R}^{r \times r}, \\ \tilde{B} = V^T B \in \mathbb{R}^{r \times m} \\ \text{und} \\ \tilde{C}_p = C_p V,\ \tilde{C}_v = C_v V \in \mathbb{R}^{q \times r} \end{gathered} \tag{8}$$

berechnet wird. Dabei stellt $\tilde{x} \in \mathbb{R}^r$ den reduzierten Zustandsvektor des Systems und $\tilde{y} \in \mathbb{R}^q$ eine Approximation des Ausganges des Systems dar. Die Verfahren sind automatisierbar, über einen definierbaren Frequenzbereich zuverlässig und in der Lage, vor der Reduktion festgelegte, maximal zulässige Abweichungen gegenüber dem Originalsystem einzuhalten.
Die Verwendung von Krylov-Unterraum-Verfahren basiert auf der Approximation der Übertragungsfunktion $H(s)$ eines Systems mit Hilfe eines Momentenabgleichs der Potenzreihenentwicklung der Übertragungsfunktion um einen Entwicklungspunkt s_0, weshalb diese Verfahren auch als Moment-Matching-Verfahren (engl. für Momentenabgleich) bezeichnet werden.
Die Übertragungsfunktion eines Systems zweiter Ordnung (Gleichung (1)) ist mit

$$H(s) = (C_p + sC_v)(s^2 M + sD + K)^{-1} B \tag{9}$$

gegeben und kann in eine Potenzreihe am Punkt s_0 entwickelt werden:

$$H(s) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(s_0)(s - s_0)^j, \tag{10}$$

wobei die Koeffizienten der Summanden $h_j(s_0)$ der Potenzreihe als Momente bezeichnet werden und durch

$$\begin{aligned} h_j(s_0) &= \tilde{C}_p \cdot \Delta_0(s_0) \\ h_j(s_0) &= C_v \cdot \Delta_{j-1}(s_0) + \tilde{C}_p \cdot \Delta_j(s_0), \\ &\quad \text{für } j = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta_0(s_0) &= \tilde{K}^{-1}B \\ \Delta_1(s_0) &= \tilde{K}^{-1}(-\tilde{D} \cdot \Delta_0(s_0)) \\ \Delta_j(s_0) &= \tilde{K}^{-1}(-\tilde{D} \cdot \Delta_{j-1}(s_0) - M \cdot \Delta_{j-2}(s_0)), \\ &\quad \text{für } j = 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

mit $\tilde{D} = 2s_0 M + D,\ \ \tilde{K} = s_0^2 M + s_0 D + K$ und $\tilde{C}_p = (C_p + s_0 C_v)$ definiert sind. Momentenabgleich bedeutet nun, dass ein reduziertes System bestimmt wird, dessen erste Momente mit den ersten Momenten der Übertragungsfunktion des Originalsystems am Entwicklungspunkt übereinstimmen.
Zur Bestimmung eines reduzierten Systems, das die Moment-Matching-Eigenschaft erfüllt, wird im Fall einer proportionalen Dämpfungsmatrix die Projektionsmatrix V so erzeugt, dass deren Spaltenvektoren eine Basis des Krylov-Unterraumes bilden, der durch

$$\mathcal{K}_k(P, Q) = \operatorname{span}\{Q, PQ, P^2Q, \cdots, P^{k-1}Q\} \tag{13}$$

definiert ist. Dabei sind $P = (s_0^2 M + s_0 D + K)^{-1} M$ und $Q = -(s_0^2 M + s_0 D + K)^{-1} B$ [2].
Für die Bestimmung der Projektionsmatrix V wird mit Hilfe eines geeigneten Algorithmus, wie z.B. dem Lanczos- oder dem Arnoldi-Algorithmus, eine orthonormale Basis des Krylov-Unterraumes berechnet, deren Elemente als Spaltenvektoren der Matrix V dienen [1]. Bei Systemen mit mehreren Ein- und Ausgängen wird dazu üblicherweise die Blockversion des Arnoldi-Algorithmus verwendet. Die hier vorgestellten Ergebnisse wurden mit einem Reduktionsverfahren erzielt, die den sogenannten globalen Arnoldi-Algorithmus verwenden, der eine Variante des Block-Arnoldi-Algorithmus darstellt und sich durch eine effiziente Berechnung der orthonormalen Basis des Krylov-Unterraumes für Systeme mit vielen Ein- und Ausgängen auszeichnet.
Die Anwendung eines Krylov-Unterraum-Verfahrens mit einem Entwicklungspunkt führt zu einem reduzierten System, dessen Übertragungsfunktion die Übertragungsfunktion des originalen Systems in der Umgebung des Entwicklungspunktes gut approximiert. Um ein reduziertes System zu erhalten, das die Übertragungsfunktion des originalen Systems in einem breiten Frequenzbereich gut approximiert, lässt sich die Methode des Momentenabgleichs auf mehrere Entwicklungspunkte erweitern. Dazu wird eine Projektionsmatrix V verwendet, die aus orthonormalen Basen von Block-Krylov-Unterräumen zu unterschiedlichen Entwicklungspunkten erzeugt wird. Bei Verwendung einer geeigneten Methode zur iterativen Bestimmung sinnvoller Entwicklungspunkte innerhalb eines vom Anwender definierten Frequenzbereichs, wie sie in [5] vorgestellt wird, und einer Methode zur adaptiven Bestimmung der Dimensionen der korrespondierenden Block-Krylov-Unterräume [4], kann die Approximationsqualität des reduzierten Systems bei einer vorgegebenen maximalen Dimension des reduzierten Systems innerhalb eines vom Anwender definierten Frequenzbereichs optimiert werden. Zudem lassen sich Methoden zur Fehlerabschätzung verwenden, um den Reduktionsprozess bei Unterschreiten einer maximalen Abweichung zwischen re-

duziertem und Originalsystem bezüglich eines geeigneten Fehlermaßes abzubrechen.

4 Numerische Beispiele

Um die neu entwickelten Verfahren zur Ordnungsreduktion zu validieren, wurden diese auf diverse FEM-Modelle unterschiedlicher Dimension angewendet. Als Vergleichskriterium wird das Verhalten des Originalsystems, sofern berechenbar, und des modal reduzierten Modells herangezogen. Die Auswertung kann dabei sowohl im Frequenzals auch im Zeitbereich geschehen. An einem ersten Beispiel, dem in Bild 1 dargestellt Modell einer Werkzeugmaschine, sollen zunächst die Ergebnisse der Reduktionsverfahren im Frequenzbereich dargestellt werden. Bild 2 zeigt den Nachgiebigkeitsfrequenzgang der Werkzeugmaschine am Tool Center Point (TCP) in y-Richtung und den dazugehörigen relativen Fehler. Dieser wurde mit dem Originalsystem der Dimension 187026 sowie mit Modal- und mit Krylov-Unterraum-Verfahren reduzierten Modellen berechnet, welche jeweils auf Dimension 51 reduziert wurden.

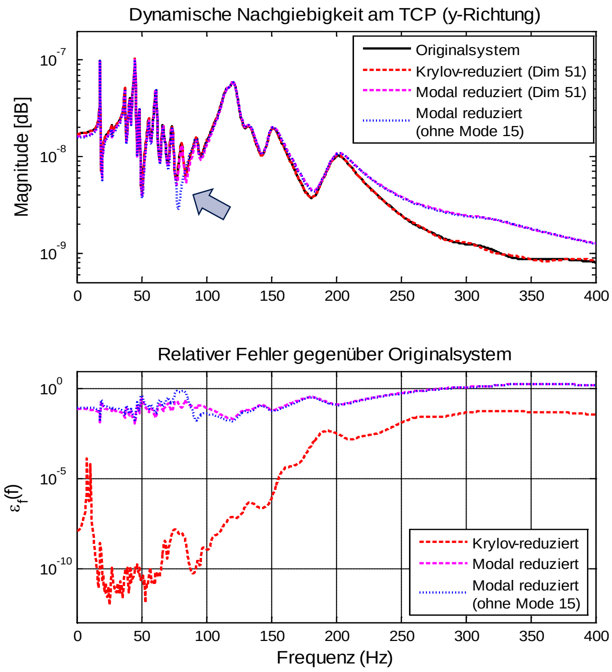

Bild 2: Dynamische Nachgiebigkeit am TCP und relativer Fehler gegenüber dem Originalsystem

Zusätzlich wurde für dieses Beispiel in einem System bewusst Mode 15 für die Modaltransformation vernachlässigt, um die Gefahr der Verfälschung des reduzierten Modells bei falscher Modenauswahl zu verdeutlichen. Die Information über die Eigenfrequenz bei 80 Hz (Pfeil in Bild 2) geht in diesem Fall vollständig verloren, was sich insbesondere in einer gekoppelten Simulation negativ auswirken kann. Der Fehler gegenüber dem Originalsystem steigt in diesem Frequenzbereich stark an. Desweiteren treten sehr große Abweichungen im Frequenzgang des modal reduzierten Modells ab ca. 200 Hertz auf. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass die Informationen bezüglich der höherfrequenten Moden aufgrund deren Vernachlässigung (modales Abschneiden) im reduzierten Modell nicht mehr vorhanden sind.

Das mit Krylov-Raum-Methoden reduzierte Modell weist dagegen über den gesamten betrachteten Frequenzbereich eine deutlich geringere Abweichung auf. Der Grund, dass der Fehler ab ca. 150 Hertz zu steigen beginnt, liegt in der Anzahl der berücksichtigten Entwicklungspunkte. Für die Reduktion wurde ein Startwert von 10 Entwicklungspunkten vorgegeben bei einem Frequenzbereich von 450 Hz. Eine Erhöhung der Anzahl der Entwicklungspunkte würde den relativen Fehler im höheren Frequenzbereich reduzieren, ließe aber gleichzeitig die Dimension des reduzierten Systems steigen.

Für die Validierung im Zeitbereich kann einerseits eine Lösung des Differentialgleichungssystems mit einer entsprechenden Anregungsfunktion gewählt werden oder aber eine Simulation des gekoppelten Systems aus den strukturmechanischen Komponenten der Maschine mit dem regelungstechnischen Modell der elektromechanischen Antriebe (Bild 3). Hierfür muss das Gleichungssystem der Mechanik so aufgestellt werden, dass einerseits eine Starrkörperbewegung in Richtung der gewünschten Bewegungsrichtung möglich ist und andererseits die entsprechenden Ein- und Ausgänge im System enthalten sind, welche der Regler für die Überprüfung der Stellgrößen benötigt, aber auch entsprechend auf das mechanische Stellglied zugreifen kann. Aus systemtheoretischer Sicht entsteht dadurch ein MIMO-System, welches besondere Ansprüche an das Reduktionsverfahren stellt, da nun statt eines einfachen Krylov-Raum-Verfahrens ein Block-Krylov-Raum-Verfahren oder eine sogenannte globale Variante verwendet werden muss.

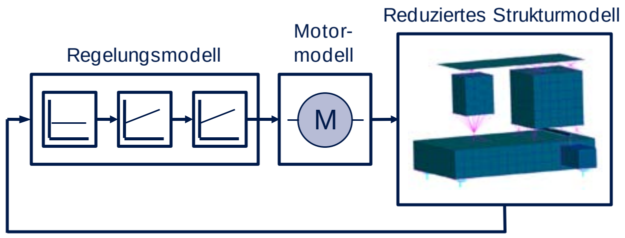

Bild 3: Schematische Darstellung der gekoppelten Simulation von Strukturmechanischem und regelungstechnischem Modell

Als Anwendungsbeispiel wurde ein stark vereinfachtes Modell einer Werkzeugmaschine modelliert (Bild 3). Ziel dieses Modells ist es, die gewünschte Funktionalität der Verfahrbarkeit einer Linearführung bei einer möglichst kleinen Anzahl von Freiheitsgraden (Dimension 4983) zu realisieren, um anhand dessen die Reduktionsalgorithmen für die gekoppelte Simulation zu validieren.

Dazu wurde mit Hilfe der digitalen Blocksimulation das gekoppelte System der Modelle der Struktur, der elektromechanischen Antriebe sowie der Regelung (kaskadierter Lageregler) generiert. Als Sollwert wurde dem Regler ein Sprung von einem Millimeter vorgegeben. Dieser sogenannte Sollwertsprung dient auch bei der realen Inbetriebnahme von Werkzeugmaschinen als Gütekriterium, da die ruckartige Bewegung die Struktur breitbandig anregt und somit die Reglerqualität überprüft. Bild 4 zeigt die Simulationsergebnisse des Lagesollsprungs des modalen Modells sowie des Krylov-Raum-reduzierten Modells.

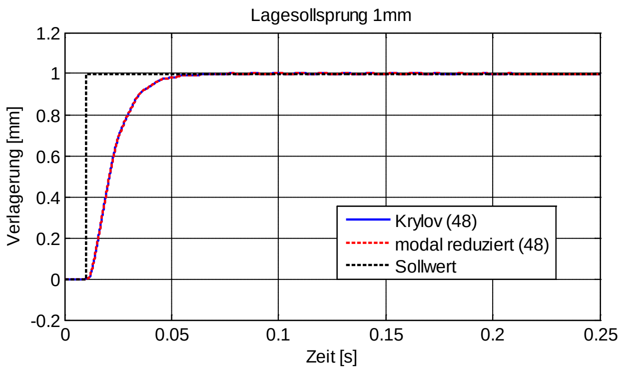

Bild 4: Sprungantwort der reduzierten Modelle im geschlossenen Regelkreis

Es ist erkennbar, dass bei beiden Modellen der Sollwert nach kurzer Zeit ohne überschwingen erreicht wird. Damit kann gezeigt werden, dass sich die modernen Reduktionsverfahren basierend auf Krylov-Unterräumen zur Reduktion strukturmechanischer Modelle von Werkzeugmaschinen auch für die Erstellung von Systemmodellen für die gekoppelte Simulation eignen. Die nächsten Arbeiten werden sich auf die Untersuchung der Auswirkungen der Reduktionsalgorithmen auf die modellbasierte Reglerauslegung konzentrieren. Eine Herausforderung stellt dabei insbesondere die Zeitbereichsberechnung des unreduzierten Systems im gekoppelten System dar. Damit können dann auch für diese Anwendung die Abweichungen gegenüber dem Originalsystem bestimmt werden.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde der Einsatz moderner, aus der Systemtheorie stammender Modellordnungsreduktionsverfahren für die Anwendung in der Finite-Elemente-Simulation von Werkzeugmaschinen vorgestellt. Diese Verfahren besitzen gegenüber der bislang angewandten modalen Reduktion erhebliche Vorteile. Die Verfahren basieren dabei auf der Approximation der Übertragungsfunktion des Originalsystems bzw. auf BTA. Aufgrund der mathematischen Systembewertung besitzen die vorgestellten Verfahren gegenüber den modalen Methoden den entscheidenden Vorteil, dass sie gut automatisierbar sind und die Auswahl der relevanten Moden entfällt. Auf diese Weise wird verhindert, dass Approximationsfehler wegen falsch gewählter oder fehlender Moden entstehen. Auch die Einflüsse von gekoppelten oder stark gedämpften Eigenmoden, die nicht trivial identifizierbar sind, werden mit dem neuen Verfahren im reduzierten Modell berücksichtigt, da alle wichtigen Systeminformationen, die sich im Übertragungsverhalten widerspiegeln auch im reduzierten Modell enthalten sind. Darüber hinaus kann bereits vor der Reduktion durch die Festlegung von Fehlerschranken eine definierte maximale Abweichung vom Originalsystem vorgegeben werden, wodurch der Anwender von einer (sukzessiven) Anpassung des reduzierten Modells enthoben wird. Diese Reduktionsverfahren stellen somit zuverlässige und leistungsstarke Instrumente für die effiziente Simulation von Werkzeugmaschinen dar.

Es konnte gezeigt werden, dass diese Verfahren auch zur Reduktion großer Gleichungssysteme, wie sie bei der Modellierung ganzer Werkzeugmaschinen auftreten, einsetzbar sind. Im nächsten Schritt muss die Anwendung der Reduktionsmethoden für die gekoppelte Simulation mit mehreren verfahrbaren Achsen untersucht und validiert werden. Darüber hinaus gilt es die Einflüsse des Reduktionsverfahrens auf die modellbasierte Reglerauslegung und -parametrierung zu untersuchen.

6 Literatur

[1] Antoulas, A. C.: Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. Philadelphia: SIAM, 2005.

[2] Beattie, B.; Gugercin, S.: Krylov-based model reduction of second-order systems with proportional damping. In: *Proceedings of the 44'th IEEE Conference on Decision and Control 2005*, S. 2278-2282.

[3] Benner, P.; Bonin, T.; Faßbender; H.; Saak, J.; Soppa, A.; Zäh, M.: Novel Model Reduction Techniques for Control of Machine Tools. In: *Proceedings of the ANSYS Conference & 27. CADFEM Users' Meeting 2009*, 18.-20. November 2009, Congress Center Leipzig. Paper 2.9.18 (10 Seiten).

[4] Chu, C.-C.; Lai, M. H.; Feng, W. S.: MIMO Interconnects Order Reductions by Using the Multiple Point Adaptive-Order Rational Global Arnoldi Algorithm. IEICE Trans. Electron., Vol. E89-C, No. 6 (2006), S. 792-802.

[5] Faßbender; H.; Soppa, A.: Machine tool simulation based on reduced order FE models. In: Troch, I.; Breitenecker, F.: *MathMod 2009 Proceedings*: No. 35, Vol. 2 of ARGESIM-Reports, 2009, S. 1266-1277.

[6] Gasch, R.; Knothe, K.: Strukturdynamik, Band 2: Kontinua und ihre Diskretisierung. Berlin: Springer, 1998.

[7] Gawronski, W. K.: Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures. New York: Springer, 1994.

[8] Großmann, K.; Rudolph, H.; Brecher, C.; Fey, M.; Zäh, M. F.; Niehues, K.; Schwarz, S.: Dämpfungseffekte in Werkzeugmaschinen. ZWF 105 (2010) 7-8, S. 676-680.

[9] Oertli, T.: Strukturmechanische Berechnung und Regelungssimulation von Werkzeugmaschinen mit elektromechanischen Vorschubantrieben. Dissertation, Technische Universität München, 2008.

[10] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: The Finite Element Method, 4th Ed. Vol. 1: Basic Formulation and Linear Problems. London: McGraw-Hill 1994.