

# SIMULATION GEKOPPELTER BAUGRUPPEN: EFFIZIENTE ZEITINTEGRATIONSVERFAHREN UND MODELLORDNUNGSREDUKTION

Autoren

*N. Lang, P. Benner (TU Chemnitz, Mathematik in Industrie und Technik)*

*A. Naumann, J. Wensch (TU Dresden, Institut für wiss. Rechnen)*

## 1. EINLEITUNG

Für eine simulationsgestützte Vorhersage des thermischen Verhaltens moderner Werkzeugmaschinen sind hochaufgelöste FE-Modelle unumgänglich. Die FE-Modellierung einer Gesamtmaschine stellt dabei eine hochkomplexe Aufgabenstellung dar. Zur Vereinfachung des Modellierungsprozesses zerlegt man daher die Maschine in verschiedene Teilbaugruppen, welche anschließend über spezifische Kontaktbedingungen gekoppelt werden. In diesem Beitrag betrachten wir als vereinfachtes Testobjekt eine teilweise verspannte Gestellkonstruktion, bestehend aus 8 Aluminiumeinzelplatten (2 Deckplatten, 2 Wandplatten, 4 Stege), siehe Abbildung 1. Diese werden anschließend, basierend auf der Zusammenführung baugleicher Gestellplatten, zu  $n_{BG} = 3$  separaten Baugruppen zusammengefasst. Die Wärmeleitprozesse der Einzelbaugruppen  $\Omega_j, j = 1, \dots, n_{BG}$  sind dabei durch

$$\begin{aligned} c_p \rho \partial_t T_j(t) &= \nabla \cdot \lambda \nabla T_j, & \text{auf } \Omega_j, \\ \lambda \partial_\nu T_j &= f_j, & \text{auf } \Gamma_{in}, \\ \lambda \partial_\nu T_j &= \alpha_{ext}(T_{ext} - T_j), & \text{auf } \Gamma_{j,ext}, \\ \lambda \partial_\nu T_j &= \alpha_k(T_l - T_j), & \text{auf } \Gamma_k \end{aligned} \tag{1}$$

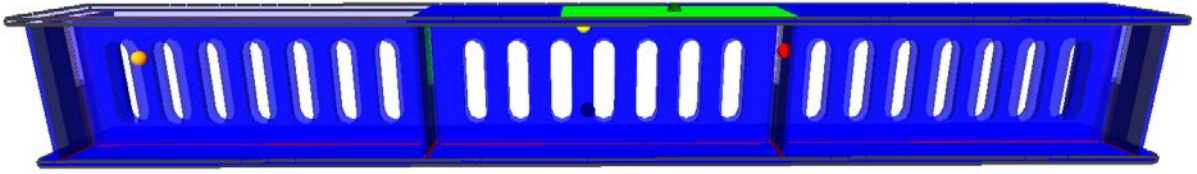


Abbildung 1 Der Versuchsträger besteht aus den 8 verspannten Platten: 2 Decken, 4 Stege und 2 Wände. Hierbei sind insbesondere die Wärmeübergänge zwischen den Wänden und den Decken verspannt, was mit größeren Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  modelliert wird.

beschrieben. Dabei sind  $c_p$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$  die spezifische Wärmekapazität, die Materialdichte sowie die Wärmeleitfähigkeit. Insbesondere sind diese Parameter für alle Baugruppen identisch. Die Parameter  $\alpha_k$  beschreiben die Wärmeübergangskoeffizienten auf den Randgebieten  $\Gamma_k$ , welche die Bereiche des Austauschs zwischen den BGen  $j$  und  $l$  realisieren. Auf die Randgebiete  $\Gamma_{in}$  wirken die externen Lasten in Form der Wärmeströme  $f_j$  und die Ränder  $\Gamma_{j,ext}$  beschreiben die Konvektionsrandflächen mit den Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_{ext}$ .

Wir diskretisieren jede Komponente  $j$  des Systems partieller Differentialgleichungen (1) mit der Methode der Finiten Elemente. Dadurch erhalten wir das System

$$\begin{aligned} E_j \dot{T}_j &= \sum_i A_{ij} T_i + b_j(t), \\ T_j(0) &= T_{j0} \end{aligned} \quad (2)$$

gewöhnlicher Differentialgleichungen. Dabei beschreiben die  $E_j$  die diskreten Massematrizen, die Systemmatrizen  $A_{ij}$  bestehen aus den diskretisierten Laplaceoperatoren sowie den diskretisierten Randmasseanteilen aus den Robin-Randbedingungen der jeweiligen Baugruppe  $j$ . Die Wärmequellen  $f_j$  sowie die äußeren Einflüsse  $\alpha_{ext} T_{ext}$  und  $\alpha_k T_l$  aus den Randbedingungen werden zu den externen Lasten  $b_j(t)$ , der Baugruppe  $j$  zusammengefasst. Die Anfangstemperatur ist durch  $T_{j0}$  gegeben.

Für die effiziente Simulation des gekoppelten Gesamtmodells werden in Abschnitt 2 spezielle Zeitintegrationsverfahren zur Lösung der hoch aufgelösten Modellgleichungen vorgestellt. Trotz der Verwendung ausgeklügelter Verfahren macht die Anzahl der Freiheitsgrade (FGe) der gekoppelten Gesamtmodelle eine Implementierung auf einer Maschinensteuerung und insbesondere eine echtzeitfähige Simulation zur Integrati-

on in verschiedene Korrekturverfahren unmöglich. Daher werden in Abschnitt 3 Modellordnungsreduktionsverfahren zur Generierung niedrigdimensionaler Ersatzmodelle untersucht. Ein numerischer Vergleich der hochaufgelösten Simulation sowie der Berechnungen, basierend auf den Modellen reduzierter Ordnung, ist in Abschnitt 4 gegeben.

## 2. EFFIZIENTE VERFAHREN DER ZEITINTEGRATION

Im Folgenden werden wir die zwei parallelen Zeitintegrationsverfahren ParaReal und ParaExp und ein angepasstes Verfahren für periodische Lasten vorstellen. Zur einfacheren Darstellung fassen wir das Anfangswertproblem (2) in der Blockstruktur

$$\begin{aligned}
 E\dot{T} &= AT + b(t), \\
 E &= \text{diag}(E_1, E_2, E_3), \\
 A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \\
 T(0) &= \begin{pmatrix} T_{10} \\ T_{20} \\ T_{30} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3}$$

zusammen. Bei sehr großen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_k$  zwischen den Baugruppen müssen die Kopplungsmatrizen  $A_{ij}$  mit  $i \neq j$  in der Jacobimatrix des impliziten Verfahrens mit verwendet werden. Anderenfalls kann eine stabile Lösung mit großen Zeitschritten nicht mehr gewährleistet werden.

### 2.1. PARAREAL

Das Verfahren ParaReal ist ein paralleler Löser für gewöhnliche Differentialgleichungen. Es wurde von (LIONS, ET AL., 2001) entwickelt und basiert auf der Idee des Mehrfachschiessens. Hierfür wird der Zeithorizont des AWP (3) in  $P$  Teilintervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  unterteilt, wobei  $P$  der Anzahl der verfügbaren Prozessoren entspricht. Auf jedem Zeitintervall wird dann eine Ausgangslösung zum einen mit einem Feinskalenintegrator (F) korrigiert und zum anderen die Korrektur mit einem Grobskalenintegrator (G) schnell zum nächsten Intervall propagiert. Von dem Anfangswertproblem (3) sind zu Beginn der Iterationen nur die Anfangswerte bekannt. Um eine erste grobe Lösung zu gewinnen, werden somit  $P$  Grobskalenintegratoren angewendet, die die Lösungen  $T_k^0$  an den Intervallgrenzen berechnen. Ausgehend von den Werten  $T_k^n$  der  $n$ ten Iterati-

on wird dann die Lösung  $U_{k+1}^{n+1}$  der neuen Iteration  $n + 1$  an den Stellen  $t_{k+1}$  mit der Vorschrift

$$T_{k+1}^{n+1} = G(T_{k+1}^{n+1}, t_k, t_{k+1}) + F(T_k^{n+1}, t_k, t_{k+1}) - G(T_{k+1}^n, t_k, t_{k+1})$$

berechnet. Falls die Iterationen konvergiert sind, also  $U_k^{n+1} \approx U_k^n$  gilt, erhält man demnach die Lösung des Feinskalenintegrators. Es wurde von (GANDER & VANDEWALLE, 2007) gezeigt, dass unter Voraussetzung an die Kontraktivität der Grob- und der Feinskalenintegratoren, die Iterationen mindestens linear konvergieren. Man kann also bei genügend kleiner Schrittweite eine Verbesserung in jedem Schritt erwarten. Daraus folgt wiederum, dass man die Schrittweiten für den Grobskalenintegrator nicht beliebig reduzieren kann, da sonst die Anzahl der Iterationen wächst, was wiederum mehr Aufrufe der Feinskalenintegratoren impliziert. Der zu erwartende Beschleunigungsfaktor

$$S_p = \min\left(\frac{N_f}{N_c}, \frac{P}{K}\right)$$

hängt somit sowohl von dem Verhältnis der Anzahl der Aufrufe des Feinskalenintegrators zur Anzahl der Aufrufe des Grobskalenintegrators und der Anzahl der benötigten Iterationen ab. Würde man also  $P$  Iterationen benötigen, so hätte man die feine Lösung und somit auch keinen Geschwindigkeitsgewinn. Wir verwenden im Folgenden das Rosenbrockverfahren ROS2 von (VERWER, ET AL., 1999) sowohl als Fein- als auch als Grobskalenintegrator. Allerdings verwendet der Feinskalenintegrator eine deutlich kleinere Schrittweite.

## 2.2. PARAEXP

Das Verfahren ParaExp ist ebenfalls eine parallele Methode, allerdings basiert sie auf der Linearität des AWP (3). Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen wissen wir, dass die Lösung des AWP (3)

$$T(t) = \exp(Lt) T_0 + \exp(Lt) \int_0^t \exp(-L\tau) b(\tau) d\tau,$$

mit  $L = E^{-1}A$ , aus einem homogenen und inhomogenen Anteil zusammengesetzt ist. Diese Struktur wird mit dem parallelen Verfahren ParaExp, welches von (GANDER & GÜTTEL, 2013) entwickelt wurde, ausgenutzt.

Hierbei wird wieder der Zeithorizont  $[t_0, t_e]$  in  $P$  äquidistante Intervalle unterteilt, so dass der Prozessor  $p$  auf dem Zeitintervall  $[t_p, t_{p+1}]$  arbei-

tet. Auf jedem Intervall berechnen wir dann zuerst den inhomogenen Anteil der Lösung. Das bedeutet, Prozessor  $p$  berechnet die Lösung der ODE (3) zum Zeitpunkt  $t_{p+1}$  mit dem Anfangswert  $T(t_p) = 0$ . Im Anschluss erfolgt die Lösung des homogenen Problems

$$M\dot{T} = A T$$

auf dem Intervall  $[t_p, t_e]$ , wobei die Lösung des inhomogenen Problems als Anfangswert verwendet wird. Die Lösung des homogenen Problems entspricht gerade der Anwendung der Matrix-Exponentialfunktion auf den Anfangswert. Für deren Approximation wurde von (Moler & Loan, 2003) 20 verschiedene Verfahren untersucht. Wir verwenden eine Kombination aus der 6. Methode, explizite Einschrittverfahren, und der 20. Methode, Krylov-Unterraumverfahren. Anstatt expliziter Einschrittverfahren verwenden wir ein 2-stufiges Rosenbrock Verfahren zusammen mit dem CG-Verfahren als Gleichungslöser.

Die Lösung zum Endzeitpunkt ist die Superposition aller Teillösungen auf den  $P$  Prozessoren.

Das Verfahren nutzt hierbei zwei Eigenschaften des Problems aus. Zum einen die Linearität, so dass die Lösung auf einfachem Weg in zwei Anteile zerlegt werden kann. Zum anderen ist die Wärmeleitung ein dissipatives Problem. Dadurch können die homogenen Probleme mit deutlich größeren Schrittweiten, und somit deutlich schneller, gelöst werden. Des Weiteren werden mit mehr Prozessoren die Intervalle pro Prozessor kleiner. Für eine konstante Genauigkeit kann man nun die Anzahl der benötigten Schritte entsprechend reduzieren, woraus auch der zu erwartende Beschleunigungsfaktor resultiert.

### 2.3. PARAEXP MIT DEFECT CORRECTED AVERAGING

Viele produktionstechnische Problemstellungen lassen sich durch periodische Probleme abbilden. Dazu gehören insbesondere gleichförmige relativ bewegte Baugruppen mit der zugehörigen Reibung als Wärmequelle.

Für derartige Problemstellungen wurde in (NAUMANN, ET AL., 2015) das Verfahren *Defect Corrected Averaging* (DCA) entwickelt. Dieses Verfahren nutzt, wie auch ParaExp, die Linearität und die Periodizität der Quelle aus. Während klassische Methoden die Periodenlänge auflösen müssen, erfordert DCA lediglich eine Simulation mit der periodischen Quelle und einige wenige Simulationen über eine Periodenlänge  $\varepsilon$ .

Die Basis für das Verfahren ist wieder die analytische Lösung des Anfangswertproblems (3)

$$T(t) = \exp(Lt) T_0 + t \phi_1(Lt) (\varepsilon \phi_1(\varepsilon L))^{-1} \exp(\varepsilon L) \int_0^\varepsilon \exp(-\tau L) b(\tau) d\tau,$$

$$L = E^{-1}A,$$

$$\phi_1(L) = L^{-1}(\exp(L) - I)$$

an den stroboskopischen Punkten  $t = n\varepsilon$ , diesmal unter Ausnutzung der Periodizität der Quelle  $f(t)$ . Die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} \dot{T}_c &= L T_c + g, \\ T_c(0) &= T_{0c}, \end{aligned} \quad (4)$$

mit konstanter Quelle  $g$ , ist

$$T_c(t) = \exp(Lt) T_{0c} + t \phi_1(Lt) g.$$

Dieses AWP lässt sich mit größeren Schrittweiten als der Periodenlänge  $\varepsilon$  lösen. Ein Vergleich der beiden Lösungen zeigt, dass man die konstante Quelle  $g$  so wählen kann, dass die Lösungen  $T_c$  in den stroboskopischen Punkten identisch zu der Lösung des periodischen Problems  $T(t)$  sind. Erfüllt  $g$  die Gleichung

$$\varepsilon \phi_1(\varepsilon L) g = \exp(\varepsilon L) \int_0^\varepsilon \exp(-\tau L) b(\tau) d\tau, \quad (5)$$

so können wir die einfachere ODE (4) als Ersatzproblem für das periodische Anfangswertproblem lösen.

Die Gleichung (5) ist ein lineares Problem in  $g$ . Die rechte Seite der Gleichung entspricht gerade der Lösung der periodischen ODE (3) mit dem Anfangswert  $T(0) = 0$  zum Zeitpunkt  $t = \varepsilon$ . An dieser Stelle muss also das periodische Problem mit einem Feinskalenintegrator über eine Periode gelöst werden. Die linke Seite der Gleichung (5) entspricht gerade der Lösung von (4) zum Zeitpunkt  $t = \varepsilon$ . Da der Term  $\varepsilon \phi_1(\varepsilon L) g$  nicht als Matrix vorliegt, können lediglich die Wirkung des Operators auf einen gegebene Vektor berechnet werden. Aus diesem Grund wird zur Lösung von (5) das Krylov-Unterraumverfahren GMRES verwendet. Die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens hängt wesentlich von der Lage der Eigenwerte des Operators  $\varepsilon \phi_1(\varepsilon L) g$  ab. Unter Einsatz eines entsprechenden Vorkonditionierers kann die Konvergenzgeschwindigkeit erheblich verbessert werden, siehe (KLÖPPEL, ET AL., 2014). Es werden daher nur wenige GMRES-Iterationen, also nur wenige Anwendungen von  $\varepsilon \phi_1(\varepsilon L) g$  benötigt. Für die Anwendungen wird ebenfalls wieder ein Feinskalenintegrator mit deutlich größeren Zeitschrittweiten eingesetzt.

Nach der Berechnung der konstanten Quelle  $g$  kann das Ersatzproblem mit großen Zeitschrittweiten, insbesondere Vielfachen der Periodenlänge  $\varepsilon$ , gelöst werden.

Somit ist der aufwendigste Anteil des Verfahrens die einmalige Lösung des periodischen Problems über eine Periode mit kleinen Schrittweiten. Von der Genauigkeit dieser Lösung hängt auch die Qualität der Ersatzlösung  $T_c$  ab. Hier lohnt es sich, den parallelen Zeitintegrator ParaExp aus dem vorherigen Abschnitt einzusetzen.

### 3. MODELLORDNUNGSREDUKTION

#### 3.1. MOR von LTI Systemen

Im Folgenden betrachten wir die Modellordnungsreduktion (MOR) linear zeitinvarianter Systeme (engl. linear time-invariant - LTI) der Form

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Dabei beschreiben  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  die Masse-, System-, Eingangs- sowie Ausgangsmatrizen des sogenannten Originalsystems (engl. auch full-order model - FOM). Weiter sind  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  der Systemzustand,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  die Systemeingänge (z.B. externe Lasten) und  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  die Systemausgänge (z.B. Auswertungen an bestimmten Messpunkten, jeweils zum Zeitpunkt  $t$ ). Das Ziel der MOR ist nun die Generierung eines niedrigdimensionalen Ersatzmodells

$$\begin{aligned} \hat{E}\hat{\dot{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \\ \hat{y}(t) &= \hat{C}\hat{x}(t), \end{aligned} \quad (7)$$

mit  $\hat{E}, \hat{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $\hat{C} \in \mathbb{R}^{q \times r}$  und einer deutlich reduzierten Anzahl an Freiheitsgraden (FGen)  $r \ll n$ , beschrieben durch den niedrigdimensionalen Zustand  $\hat{x} \in \mathbb{R}^r$ . Dabei soll das Systemverhalten des FOM möglichst genau wiedergespiegelt werden. D.h., es wird ein Ersatzmodell (7) gesucht, welches unter Verwendung des ursprünglichen Eingangssignals  $u(t)$  die Bedingung  $\|y(t) - \hat{y}(t)\| < \varepsilon$  erfüllt. Hierbei beschreibt  $\varepsilon > 0$  eine vom Anwender vorgeschriebene Fehlertoleranz.

Die Matrizen reduzierter Ordnung sind dabei wie folgt definiert:

$$\hat{E} = W^T E V, \quad \hat{A} = W^T A V, \quad \hat{B} = W^T B, \quad \hat{C} = C V. \quad (8)$$

Mit anderen Worten werden Transformationsmatrizen  $V, W \in \mathbb{R}^{n \times r}$  gesucht, sodass (7) die gegebenen Anforderungen an (6) erfüllt. In der Lite-

ratur findet man eine Vielzahl an Vorgehensweisen zur Bestimmung geeigneter Transformationsmatrizen  $V, W$ . Für einen detaillierten Überblick über die grundlegende MOR Theorie und verschiedene Reduktionsverfahren siehe, z.B., (ANTOULAS, 2005), (BENNER, ET AL., 2005).

### Bemerkung:

Ein wesentlicher Bestandteil der Reduktionsverfahren ist das Lösen linearer Gleichungssysteme (LGSe). Die Anzahl der zu lösenden LGSe ist dabei stark von der Anzahl der Systemeingänge sowie -ausgänge abhängig und beeinflusst damit direkt den numerischen Aufwand zur Berechnung der Transformationsmatrizen.

## 3.2. MOR von gekoppelten Baugruppen

Angelehnt an (REIS & STYKEL, 2007), (VANDENDORPE & VAN DOOREN, 2008) werden in diesem Abschnitt zwei Ansätze der Modellordnungsreduktion für die Behandlung des thermischen Verhaltens von gekoppelten Baugruppen untersucht. Ein Vergleich der erzielten Ergebnisse ist in Abschnitt 4.1 gegeben.

Zur Beschreibung des gekoppelten Gesamtmodells, betrachten wir zunächst die Wärmeleitungsprobleme (2) der einzelnen BGen. Diese werden in Form der Zustandsraumprobleme

$$\begin{aligned} E_j \dot{T}_j(t) &= A_j T_j(t) + B_j u_j(t), \\ y_j(t) &= C_j T_j \end{aligned} \quad (9)$$

definiert. Dabei beschreibt das diskrete Temperaturfeld  $T_j$  den Systemzustand. Die Matrizen  $A_j$  entsprechen dabei den  $A_{jj}$  aus Gleichung (2). Der Ausdruck  $B_j u_j$  stellt eine Umformulierung der Lasten  $b_j(t)$  mit den Systemeingängen  $u_j$  dar und  $y_j$  definiert die internen Systemausgänge der jeweiligen BGe  $j$ . Die Kopplung der Einzelbaugruppen, zuvor durch die Matrizen  $A_{ij}, i \neq j$  beschrieben, wird im Folgenden mittels der Beziehungen

$$\begin{aligned} u_j(t) &= K_{j,1} y_1(t) + \dots + K_{j,n_{BG}} y_{n_{BG}}(t) + H_j u(t), \quad j = 1, \dots, n_{BG}, \\ y(t) &= R_1 y_1(t) + \dots + R_{n_{BG}} y_{n_{BG}}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

realisiert. Dabei sind  $E_j, A_j \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}, B_j \in \mathbb{R}^{n_j \times m_j}, C_j \in \mathbb{R}^{q_j \times n_j}$ . Weiter bezeichnen wir  $K_{j,l}, H_j, R_j$  im Weiteren als Koppelmatrizen. Insbesondere beschreibt  $K_{j,l}$  die Verwendung der Systemausgänge der Einzelbaugruppe  $l$  als Systemeingänge der BGe  $j$ . Mit Hilfe der Matrizen  $H_j, j = 1, \dots, n_{BG}$  werden die externen Eingänge  $u(t)$  dem Gesamtsystem zugeführt und die Matrizen  $R_j$  extrahieren die globalen Ausgänge  $y$  aus



den internen Ausgängen  $y_j$  der einzelnen Subsysteme. Definiert man die Blockdiagonalmatrizen

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \text{diag}\{E_1, \dots, E_{n_{BG}}\}, & \tilde{A} &= \text{diag}\{A_1, \dots, A_{n_{BG}}\}, \\ \tilde{B} &= \text{diag}\{B_1, \dots, B_{n_{BG}}\}, & \tilde{C} &= \text{diag}\{C_1, \dots, C_{n_{BG}}\}\end{aligned}\quad (11)$$

sowie

$$K = (K_{j,l})_{j,l=1}^{n_{BG}}, \quad H = [H_1^T, \dots, H_{n_{BG}}^T]^T, \quad R = [R_1, \dots, R_{n_{BG}}]$$

für die Kopplung, so ergibt sich, basierend auf den Formulierungen der Subsysteme (9) sowie deren Koppelbeziehungen, das Gesamtsystem

$$\begin{aligned}E\dot{T}(t) &= AT(t) + Bu(t), \\ y(t) &= CT(t),\end{aligned}\quad (12)$$

mit

$$E = \tilde{E}, \quad A = \tilde{A} + \tilde{B} K \tilde{C}, \quad B = \tilde{B} H, \quad C = R \tilde{C}.\quad (13)$$

Aus den Darstellungen (9)+(10) und (12)+(13) ergeben sich nun direkt zwei Modellreduktionsansätze.

In Ansatz 1 (MOR Gesamt) werden die Reduktionsverfahren direkt auf das bereits verkoppelte Gesamtmodell (12) angewendet. D.h., man berechnet die Transformationsmatrizen  $V$ ,  $W$ , basierend auf dem FOM (12) und bestimmt das reduzierte Ersatzmodell (7) über die Beziehung (8). Dabei sollte beachtet werden, dass diese Vorgehensweise einige Nachteile mit sich bringt. Bei der Anwendung der Reduktionsverfahren auf das FOM (12) geht die Kopplungsstruktur verloren. Das bedeutet, z.B., dass Änderungen des Gesamtmodells, durch z.B. das Ersetzen eines der Submodelle oder das Hinzufügen weiterer BGen dazu führt, dass der Reduktionsprozess erneut für das komplette neue Gesamtmodell durchgeführt werden muss. Weiter basiert der gesamte MOR-Vorgang auf dem Lösen linearer Systeme der Größe  $n = \sum_{j=1}^{n_{BG}} n_j$ . Ausgehend von der geringen Anzahl von globalen Ein- bzw. Ausgängen ist die Anzahl dieser LGS jedoch relativ gering.

Ansatz 2 (MOR 3BG) beschreibt die Reduktion der einzelnen Subsysteme (9). Die daraus entstehenden Modelle reduzierter Ordnung (ROMs - reduced-order models)

$$\begin{aligned}\hat{E}_j \hat{T}_j(t) &= \hat{A}_j \hat{T}_j(t) + \hat{B}_j \hat{u}_j(t), \\ \hat{y}_j(t) &= \hat{C}_j \hat{T}_j(t)\end{aligned}\quad (14)$$

werden anschließend mit Hilfe der Koppelmatrizen  $K$ ,  $H$ ,  $R$  und den Koppelbeziehungen

$$\hat{u}_j(t) = K_{j,1} \hat{y}_1(t) + \dots + K_{j,n_{BG}} \hat{y}_{n_{BG}}(t) + H_j u(t), \quad j = 1, \dots, n_{BG},$$

$$\hat{y}(t) = R_1 \hat{y}_1(t) \dots + R_{n_{BG}} \hat{y}_{n_{BG}}(t)$$

zu einem niedrigdimensionalen Gesamtmodell

$$\begin{aligned} \hat{E} \hat{T}(t) &= \hat{A} \hat{T}(t) + \hat{B} \hat{u}(t), \\ \hat{y}(t) &= \hat{C} \hat{T}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

zusammengefügt. Die Matrizen  $\hat{E}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  ergeben sich analog zu den Matrizen in (11) und (13) in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \text{diag}\{\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_{n_{BG}}\}, & \tilde{A} &= \text{diag}\{\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_{n_{BG}}\}, \\ \tilde{B} &= \text{diag}\{\hat{B}_1, \dots, \hat{B}_{n_{BG}}\}, & \tilde{C} &= \text{diag}\{\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_{n_{BG}}\}, \\ \hat{E} &= \tilde{E}, & \hat{A} &= \tilde{A} + \tilde{B} K \tilde{C}, & \hat{B} &= \tilde{B} H, & \hat{C} &= R \tilde{C}. \end{aligned} \quad (16)$$

Damit ergibt sich eine Gesamtdimension von  $r = \sum_{j=1}^{n_{BG}} r_j$ , wobei  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, n_{BG}$ , die Größe der reduzierten Subsysteme beschreibt.

Es ist zu betonen, dass die Kopplung der ROMs auf denselben Matrizen  $K, H, R$ , wie im Originalmodell, beruht. D.h., dieses Vorgehen erhält die Struktur des FOM. Weiter ist zu bemerken, dass, aufgrund der Verwendung der approximierten internen Ausgänge  $\hat{y}_j$ , an dieser Stelle der modifizierte Eingang  $\hat{u}$  in das Ersatzmodell (15) eingeht. Weiter kann für die Reduktion der Einzelmodelle, genau wie in Ansatz 1, jede geeignete Reduktionsmethode verwendet werden. Insbesondere erlaubt diese Vorgehensweise die Anwendung problemangepasster Reduktionstrategien für die einzelnen Baugruppen. Darüberhinaus kann frei entschieden werden, welches der Submodelle durch ein niedrigdimensionales Ersatzmodell ausgetauscht werden sollen. Wie schon in Ansatz 1 angedeutet, kann das resultierende Ersatzmodell einfach modifiziert werden, indem die reduzierten Modelle einzelner BGen getauscht oder neuer BGen hinzugefügt werden. Auf der anderen Seite besitzen die Einzelmodelle in der Praxis oft eine Vielzahl an Ein- bzw. Ausgängen, was zu Problemen bei der Anwendung der MOR-Methoden führen kann. Außerdem haben Ersatzmodelle der Form (16) oft eine vergleichsweise große Dimension  $r$  (siehe Abschnitt 4.1).

## 4. VERGLEICH

Für den Vergleich der hochaufgelösten Referenzrechnung mit Hilfe der in Abschnitt 2 dargestellten Integrationsverfahren und der in Abschnitt 3 beschriebenen MOR-Methoden werden 5 Vergleichspunkte (siehe Abbildung 1) betrachtet, die als im folgenden als die Systemausgänge  $y$  die-

nen. Als externe Systemlasten werden dafür eine Umgebungstemperatur von  $T_{j0} = 25^\circ\text{C}$ ,  $j = 1, \dots, n_{BG}$  und ein Wärmestrom der Form

$$f_j = \frac{48}{0.00338833} \left( 1 + \sin\left(\frac{2\pi t}{\varepsilon}\right) \right),$$
$$\varepsilon = 72\text{s},$$

welcher über Heizelemente (siehe grün markierte Fläche in Abbildung 1) zugeführt wird, definiert.

#### 4.1. REFERENZ UND MOR

Für die Verwendung der MOR-Verfahren ist eine 1 zu 1 Formulierung der Kontaktbereiche und der zugehörigen FE-Knoten ungeeignet, da dabei jeder FE-Knoten einen Ein- bzw. Ausgang beschreiben müsste. Daher werden die Durchschnittstemperaturen auf bestimmten begrenzten Teilbereichen der Kontaktflächen als diese Ein- bzw. Ausgänge definiert. Für das Beispiel des Testobjektes ergeben sich FOM mit  $m_j = \{57,53,17\}$  Eingängen und  $q_j = \{54,47,17\}$  Ausgängen für die jeweilige Einzelbaugruppen  $j = 1, \dots, n_{BG}$ . Nach Vernetzung der BGen mittels der Koppelbeziehungen (10) bleiben davon die 2 externen Ein- und 5 externen Ausgänge übrig. Die relativ großen Anzahlen an Ein- und Ausgängen der Einzelbaugruppen schlägt sich bei der Verwendung des MOR-Ansatzes 2 auf die Berechnungszeiten der reduzierten Modelle sowie deren reduzierte Ordnung nieder (siehe Tabelle 1). Für beide Reduktionsansätze wurde das Verfahren des *Balancierten Abschneidens* mit einer Abschneidetoleranz von  $1e - 5$  verwendet. Zur Simulation der resultierenden Ersatzmodelle reduzierter Ordnung wurde das implizite Eulerverfahren mit einer Zeitschrittweite von  $0.225\text{s}$  eingesetzt.

Es ist zu beachten, dass die Verwendung der Durchschnittstemperaturen auf speziell definierten Teilflächen der Kontaktbereiche eine Approximation an das Originalmodell darstellt und damit bereits einen Fehler bzgl. der Simulationsergebnisse hervorruft. Das Ziel der MOR kann an dieser Stelle also nur sein, einen MOR-Fehler zu generieren, der in seiner Größenordnung kleiner ist als der bereits eingeführte Approximationsfehler zur Erstellung der FOM in Form der Zustandsraumprobleme (9). Abbildung 2 zeigt die berechneten Temperaturverläufe und die relativen Fehler des modifizierten FOM Gesamtmodells sowie der beiden reduzierten Modelle bezüglich der hochaufgelösten Referenzrechnung. Dabei ist zu erkennen, dass sowohl das FOM, welches für eine effiziente Verwen-

derung der MOR erstellt wurde, als auch die zugehörigen Modelle reduzierter Ordnung einen Fehler im Promillebereich generieren. In weiteren numerischen Auswertung, welche aus Platzgründen hier nicht aufgeführt werden, zeigt sich, dass der relative MOR-Fehler beider Reduktionsvorgehensweisen bezüglich des FOMs im Bereich von  $1e - 5$  liegt und damit keinen Einfluss auf die geforderte Genauigkeit der Zustandsraummodells hat.

Tabelle 1: Vergleich der MOR-Ansätze bzgl. Reduktionszeiten (offline), reduzierter Ordnungen und Simulationszeiten (online)

	Reduktionszeit	Reduzierte Ordnung	Simulationszeit
<b>MOR 3BG</b>	(74.27 / 82.33 / 3.17)	510 (216,249,45)	42.10s
<b>MOR Gesamt</b>	25.22	20	0.40s

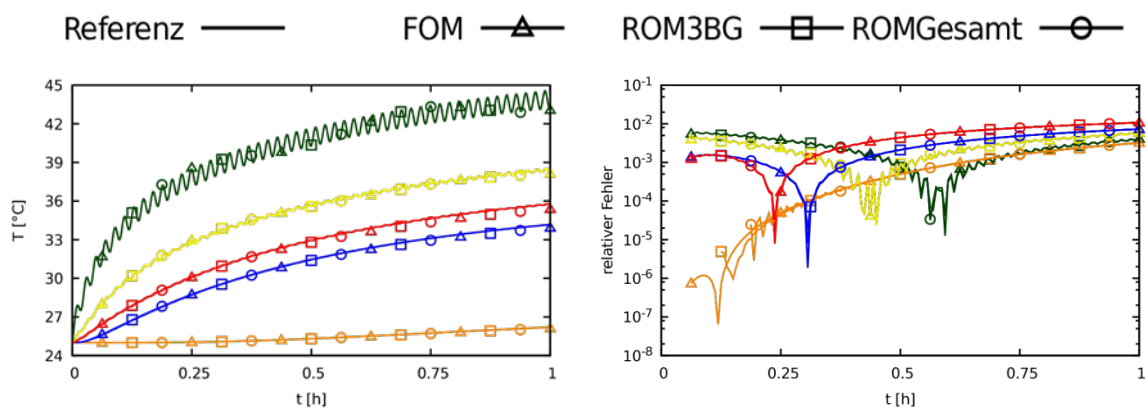


Abbildung 2: Vergleich der Temperaturverläufe zwischen Referenzmodell und den MOR-Strategien (links), zugehörige relative Fehler (rechts).

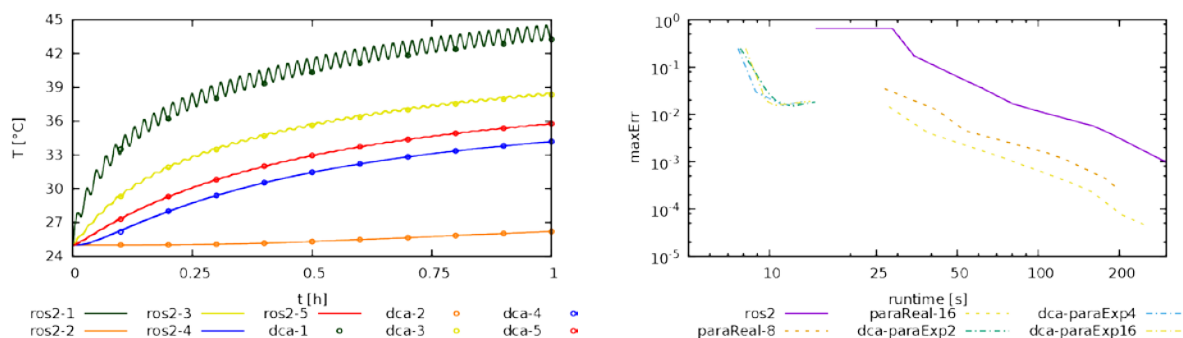


Abbildung 3: Vergleich der DCA-Lösung mit der oszillierenden ROS2-Lösung im linken Bild. Die Farben entsprechen den Punkten in Abbildung 1. Der Graph rechts zeigt die Laufzeit gegenüber dem maximalen Fehler der jeweiligen Verfahren zum Zeitpunkt  $t=1h$ .

## 4.2. PARAEXP UND DCA MIT KLASSISCHEN LINEAR DIMPLIZITEN METHODEN

Die Abbildungen 3 links und rechts stellen die Lösungen in den Punkten der MOR Lösung dar. In der Abbildung 3 links wird die Lösung mit dem linear-impliziten Verfahren ROS2 mit der DCA-Lösung verglichen. Die Punkte repräsentieren die Lösung mit defect corrected averaging. Entsprechend der Konstruktion liegen sie an den Intervallenden nahe an der oszillierenden Lösung. Der daraus resultierende Geschwindigkeitsgewinn, bei gleicher Genauigkeit ist in der Abbildung 3 rechts zu erkennen. Die Violette Linie entspricht der Genauigkeit der Lösung mit dem linear-impliziten Verfahren. Die grünen, blauen, goldfarbenen und gelben Linien repräsentieren verschiedene Parallelisierungsgrade. Da die Anzahl der Prozessoren die Zeitschrittweite des inhomogenen Lösungsanteils beeinflusst, erreicht man unterschiedliche Genauigkeiten. In diesem Fall sind allerdings die Lösungen mit 2 Kernen bereits ausreichend schnell und genau genug. Die Kombination aus DCA und ParaExp ist bei gleicher Genauigkeit in etwa um den Faktor 8 schneller als ROS2.

## 5. ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Beitrag wurden verschiedene Methoden zur Simulation des thermischen Verhaltens gekoppelter Baugruppen dargestellt. Unter Ausnutzung der Kopplungsstrukturen wurden die dynamischen Systemgleichungen zur Beschreibung der Einzelbaugruppen auf bekannte Problemstellungen in Blockform zurückgeführt.

Diese Blockstrukturierten Probleme können insbesondere mit klassischen linear-impliziten Zeitintegratoren gelöst werden.

Allerdings sind diese Verfahren sequentiell und nutzen somit die Parallelität heutiger Architekturen nicht aus. Wir konnten zeigen, dass durch den Einsatz paralleler Zeitintegratoren die Lösungszeit um den Faktor 4 reduzieren kann. Durch die Ausnutzung der Periodizität ist, so ist sogar eine Beschleunigung um den Faktor 10 erreicht wurden.

Im Hinblick auf die Umsetzung der thermischen Simulationen auf einer Maschinensteuerung wurden die gegebenen hochdimensionalen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen in Ersatzmodelle mit einer deutlich verringerten Anzahl an Freiheitsgraden überführt.

Abschließend wurden verschiedenen Herangehensweisen bezüglich ihrer Rechenzeiten sowie Genauigkeit untersucht.

## 6. LITERATURVERZEICHNIS

- Antoulas, A., 2005. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Advances in Design and Control, 6, SIAM Publications, Philadelphia, PA.
- Benner, P., Mehrmann, V. & Sorensen, D. C., 2005. *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*. Lect. Notes Comput. Sci. Eng., Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, Germany.
- Gander, M. J. & Güttel, S., 2013. *PARAEXP: A Parallel Integrator for Linear Initial-Value Problems*. SIAM Journal on Scientific Computing, 35(2), pp. C123-C142.
- Gander, M. J. & Vandewalle, S., 2007. *Analysis of the Parareal Time-Parallel Time-Integration Method*. SIAM Journal on Scientific Computing, 29(2), pp. 556-578.
- Gander, M. J. & Vandewalle, S., 2007. *On the Superlinear and Linear Convergence of the Parareal Algorithm*. In: O. B. Widlund & D. E. Keyes, Hrsg. Domain Decomposition Methods in Science and Engineering. s.l.:Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, pp. 291-298.
- Gerisch, A., Naumann, A. & Wensch, J., 2015. *Defect corrected averaging for highly oscillatory problems*. Applied Mathematics and Computation, Issue 0, pp. 90-103.
- Klöppel, M., Naumann, A. & Wensch, J., 2014. *Preconditioned defect corrected averaging for parabolic PDEs*. PAMM, 14(1), pp. 869-870.
- Lions, J.-L., Maday, Y. & Turinici, G., 2001. *A "parareal" in time discretization of PDE's*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, Band 332, pp. 661-668.
- Moler, C. & Loan, C. V., 2003. *Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later*. SIAM Review, 45(1), pp. 3-49.
- Reis, T. & Stykel, T., 2007. *Stability analysis and model order reduction of coupled systems*. Math. Comput. Model. Dyn. Syst., 13(5), pp. 413-436.
- Vandendorpe, A. & Van Dooren, P., 2008. *Model Reduction of Interconnected Systems*. In: W. H. A. Schilders, H. A. van der Vorst & J. Rommes, Hrsg. Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, pp. 305-321.
- Verwer, J., Spee, E., Blom, J. & Hundsdorfer, W., 1999. *A Second-Order Rosenbrock Method Applied to Photochemical Dispersion Problems*. SIAM Journal on Scientific Computing, 20(4), pp. 1456-1480.