

# Große Systeme ganz klein

## Modellreduktion in der Mikrosystemtechnik

Peter Benner

Professur Mathematik in Industrie und Technik  
Fakultät für Mathematik  
Technische Universität Chemnitz

Antrittsvorlesung  
27. Januar 2005



# Überblick

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- 1** Einleitung
  - Modellreduktion
  - MST
- 2** Modellreduktion
  - Ziele
  - Methoden
- 3** Beispiele
  - Microthruster
  - Butterfly gyro
  - Interconnect
  - Induktionsspule
- 4** Ausblick
- 5** Referenzen



# Danksagungen

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Enrique Quintana-Ortí, Gregorio Quintana-Ortí, Rafa Mayo, José Manuel Badía (Universidad Jaime I de Castellón).
- Jan Korvink, Evgenii Rudnyi, Jan Lienemann (IMTEK, Universität Freiburg)
- Thilo Penzl für LyaPack
- Allen MitarbeiterInnen der Professur MIT



# Einleitung

## Modellreduktion

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Problem

Gegeben sei ein durch eine mathematische Gleichung beschriebenes Problem, dessen **Zustandsgrößen**  $x \in \mathbb{R}^n$  zu berechnen seien, wobei  $n$  die Dimension des **Zustandsraumes** bezeichne.

*Aufgrund von Redundanzen, Komplexität o.ä. möchte man das Verhalten des Systems durch weniger Systemvariablen beschreiben.*

*Diese Aufgabe nennt man Modellreduktion (auch: Dimensionsreduktion, Ordnungsreduktion).*



# Einleitung

## Modellreduktion

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Problem

Gegeben sei ein durch eine mathematische Gleichung beschriebenes Problem, dessen **Zustandsgrößen**  $x \in \mathbb{R}^n$  zu berechnen seien, wobei  $n$  die Dimension des **Zustandsraumes** bezeichne.

Aufgrund von Redundanzen, Komplexität o.ä. möchte man das Verhalten des Systems durch weniger Systemvariablen beschreiben.

*Diese Aufgabe nennt man Modellreduktion (auch: Dimensionsreduktion, Ordnungsreduktion).*



# Einleitung

## Modellreduktion

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Problem

Gegeben sei ein durch eine mathematische Gleichung beschriebenes Problem, dessen **Zustandsgrößen**  $x \in \mathbb{R}^n$  zu berechnen seien, wobei  $n$  die Dimension des **Zustandsraumes** bezeichne.

Aufgrund von Redundanzen, Komplexität o.ä. möchte man das Verhalten des Systems durch weniger Systemvariablen beschreiben.

Diese Aufgabe nennt man **Modellreduktion** (auch: **Dimensionsreduktion, Ordnungsreduktion**).



# Beispiel: Bildverarbeitung

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Ein digitales Bild mit  $n_x \times n_y$  Pixeln kann als Matrix  $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  aufgefaßt werden, wobei  $x_{ij}$  den Farbwert angibt.
- Speicherbedarf:  $4 \cdot n_x \cdot n_y$  Bytes.

## Satz von Schmidt-Mirsky/Eckart-Young

Beste Approximation an  $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  bzgl. Spektralnorm vom Rang  $r$ :

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^r \sigma_k u_k v_k^T,$$

wobei  $X = U\Sigma V^T$  die Singulärwertzerlegung (SVD) von  $X$  ist.  
Der Approximationsfehler ist  $\|X - \hat{X}\|_2 = \sigma_{k+1}$ .

## Idee zur Dimensionsreduktion

Statt  $X$  speichere  $\sigma_1, \dots, \sigma_r, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r$ .  
 $\rightsquigarrow$  Speicherbedarf =  $r \times (n_x + n_y + 1)$  Bytes.



# Beispiel: Bildverarbeitung

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Ein digitales Bild mit  $n_x \times n_y$  Pixeln kann als Matrix  $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  aufgefaßt werden, wobei  $x_{ij}$  den Farbwert angibt.
- Speicherbedarf:  $4 \cdot n_x \cdot n_y$  Bytes.

## Satz von Schmidt-Mirsky/Eckart-Young

Beste Approximation an  $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  bzgl. Spektralnorm vom Rang  $r$ :

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^r \sigma_k u_k v_k^T,$$

wobei  $X = U \Sigma V^T$  die **Singulärwertzerlegung (SVD)** von  $X$  ist.  
Der Approximationsfehler ist  $\|X - \hat{X}\|_2 = \sigma_{k+1}$ .

## Idee zur Dimensionsreduktion

Statt  $X$  speichere  $\sigma_1, \dots, \sigma_r, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r$ .  
 $\rightsquigarrow$  Speicherbedarf =  $r \times (n_x + n_y + 1)$  Bytes.



# Beispiel: Bildverarbeitung

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Ein digitales Bild mit  $n_x \times n_y$  Pixeln kann als Matrix  $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  aufgefaßt werden, wobei  $x_{ij}$  den Farbwert angibt.
- Speicherbedarf:  $4 \cdot n_x \cdot n_y$  Bytes.

## Satz von Schmidt-Mirsky/Eckart-Young

Beste Approximation an  $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  bzgl. Spektralnorm vom Rang  $r$ :

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^r \sigma_k u_k v_k^T,$$

wobei  $X = U \Sigma V^T$  die Singulärwertzerlegung (SVD) von  $X$  ist.  
Der Approximationsfehler ist  $\|X - \hat{X}\|_2 = \sigma_{k+1}$ .

## Idee zur Dimensionsreduktion

Statt  $X$  speichere  $\sigma_1, \dots, \sigma_r, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r$ .  
↪ Speicherbedarf =  $r \times (n_x + n_y + 1)$  Bytes.



# Dimensionsreduktion mittels SVD

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

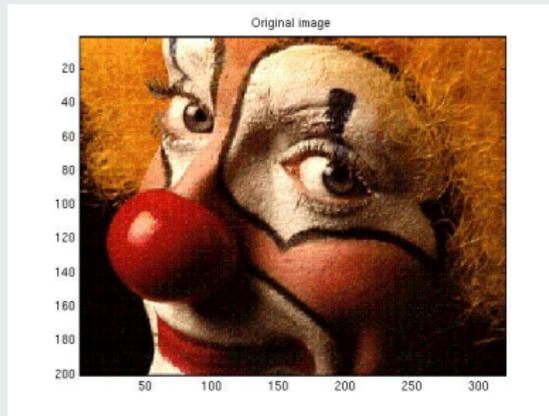
Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Beispiel: Clown



$320 \times 200$  Pixel

$\rightsquigarrow \approx 256$  KBytes Speicherbedarf



# Dimensionsreduktion mittels SVD

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

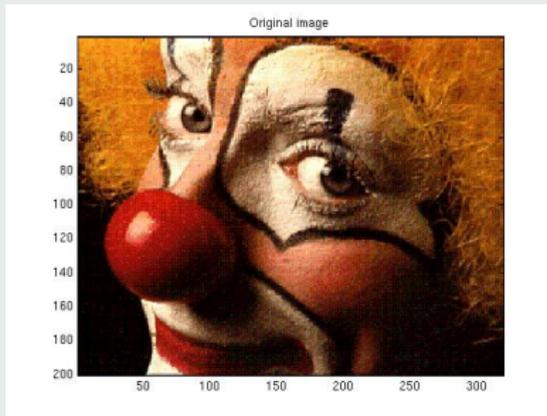
Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

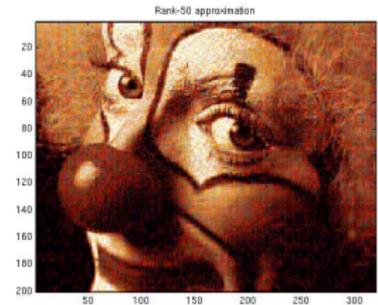
## Beispiel: Clown



$320 \times 200$  Pixel

$\rightsquigarrow \approx 256$  KBytes Speicherbedarf

■ Rang  $r = 50$ ,  $\approx 104$  KBytes





# Dimensionsreduktion mittels SVD

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

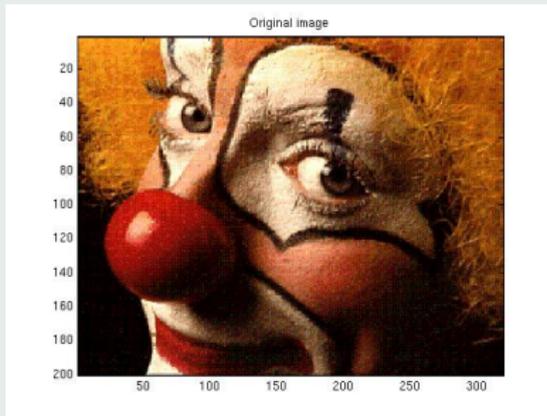
Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

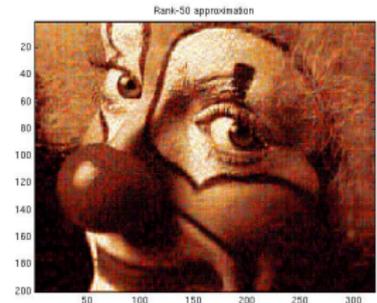
## Beispiel: Clown



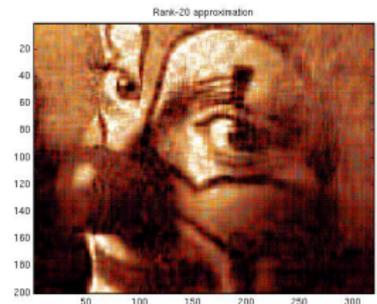
$320 \times 200$  Pixel

$\rightsquigarrow \approx 256$  KBytes Speicherbedarf

- Rang  $r = 50$ ,  $\approx 104$  KBytes



- Rang  $r = 20$ ,  $\approx 42$  KBytes





# Dimensionsreduktion mittels SVD

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

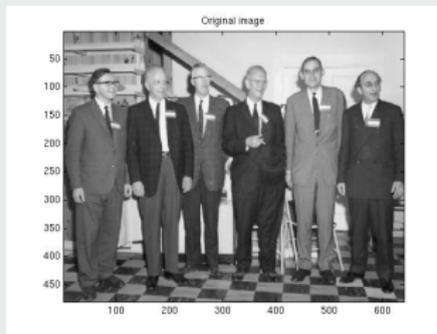
Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Beispiel: Gatlinburg

Organisationkomitee  
Gatlinburg/Householder Meeting 1964:  
*James H. Wilkinson, Wallace Givens,  
George Forsythe, Alston Householder,  
Peter Henrici, Fritz L. Bauer.*



$640 \times 480$  Pixel,  $\approx 1229$  KBytes



# Dimensionsreduktion mittels SVD

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

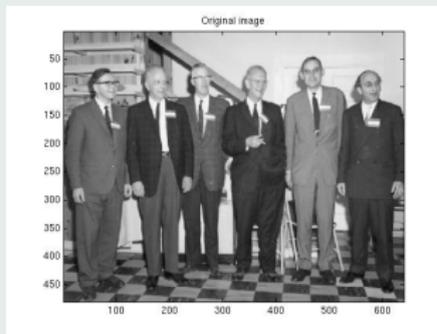
Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Beispiel: Gatlinburg

Organisationkomitee  
Gatlinburg/Householder Meeting 1964:  
*James H. Wilkinson, Wallace Givens,  
George Forsythe, Alston Householder,  
Peter Henrici, Fritz L. Bauer.*



$640 \times 480$  Pixel,  $\approx 1229$  KBytes

■ Rang  $r = 100$ ,  $\approx 448$  KBytes





# Dimensionsreduktion mittels SVD

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

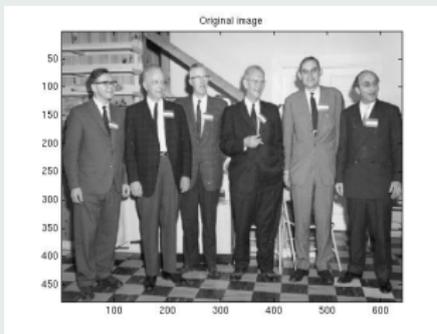
Beispiele

Ausblick

Referenzen

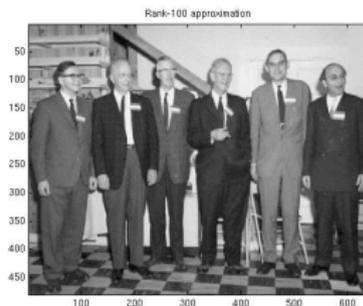
## Beispiel: Gatlinburg

Organisationkomitee  
Gatlinburg/Householder Meeting 1964:  
*James H. Wilkinson, Wallace Givens,  
George Forsythe, Alston Householder,  
Peter Henrici, Fritz L. Bauer.*



640 × 480 Pixel,  $\approx$  1229 KBytes

- Rang  $r = 100$ ,  $\approx$  448 KBytes



- Rang  $r = 50$ ,  $\approx$  224 KBytes





# Hintergrund

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

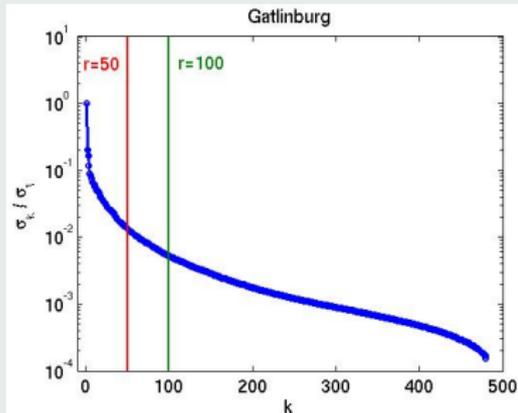
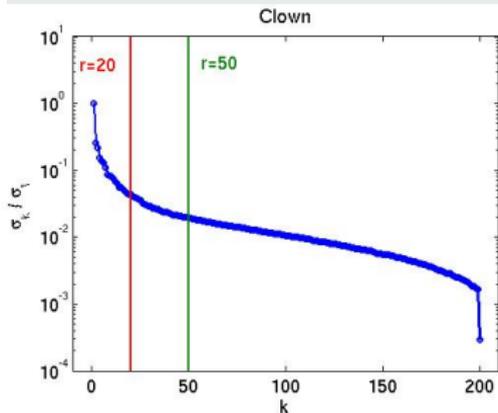
Beispiele

Ausblick

Referenzen

Bilddatenkompression mit SVD funktioniert, wenn die Singulärwerte (exponentiell) abfallen.

## Singulärwerte der Bilddatenmatrizen





# Bilddatenkompression mit JPEG

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Was ist JPEG?

- JPEG, kurz JPG, ist eines der am weitesten verbreiteten Formate zur komprimierenden, digitalen Speicherung von Bildern.
- JPEG ist die Abkürzung für *Joint Photographic Experts Group* und bezeichnet auch das von diesem Gremium entwickelte verlustbehaftete Kompressions-Verfahren für digitale Bilder.
- Der zugrundeliegende Algorithmus ist die **diskrete Kosinustransformation (DCT)**, Dimensionsreduktion entsteht durch Abschneiden der DCT.

	Original	JPEG
Clown	256 Kbytes	51 Kbytes
Gatlinburg	1229 Kbytes	33 Kbytes



# Bilddatenkompression mit JPEG

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Was ist JPEG?

- JPEG, kurz JPG, ist eines der am weitesten verbreiteten Formate zur komprimierenden, digitalen Speicherung von Bildern.
- JPEG ist die Abkürzung für *Joint Photographic Experts Group* und bezeichnet auch das von diesem Gremium entwickelte verlustbehaftete Kompressions-Verfahren für digitale Bilder.
- Der zugrundeliegende Algorithmus ist die **diskrete Kosinustransformation (DCT)**, Dimensionsreduktion entsteht durch Abschneiden der DCT.

	Original	JPEG
Clown	256 Kbytes	51 Kbytes
Gatlinburg	1229 Kbytes	33 Kbytes



## Dynamische Systeme

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & x(t_0) = x_0, \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

mit

- **Zuständen**  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,
- **Eingängen**  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- **Ausgängen**  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ .





# Modellreduktion für dynamische Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Originalsystem

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,
- Eingänge  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- Ausgänge  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ .



## Reduziertes System

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(t, \hat{x}(t), u(t)), \\ \hat{y}(t) = \hat{g}(t, \hat{x}(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $r \ll n$
- Eingänge  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- Ausgänge  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ .



Ziel:

$\|y - \hat{y}\| < \text{Toleranz} \cdot \|u\|$  für alle zulässigen Eingangssignale.



# Modellreduktion für dynamische Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Originalsystem

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,
- Eingänge  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- Ausgänge  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ .



## Reduziertes System

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(t, \hat{x}(t), u(t)), \\ \hat{y}(t) = \hat{g}(t, \hat{x}(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $r \ll n$
- Eingänge  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- Ausgänge  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ .



Ziel:

$\|y - \hat{y}\| < \text{Toleranz} \cdot \|u\|$  für alle zulässigen Eingangssignale.



# Modellreduktion für dynamische Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Originalsystem

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,
- Eingänge  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- Ausgänge  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ .



## Reduziertes System

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(t, \hat{x}(t), u(t)), \\ \hat{y}(t) = \hat{g}(t, \hat{x}(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $r \ll n$
- Eingänge  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- Ausgänge  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ .



Ziel:

$\|y - \hat{y}\| < \text{Toleranz} \cdot \|u\|$  für alle zulässigen Eingangssignale.



# Lineare Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Definition: lineare, zeitinvariante Systeme

$$\begin{aligned} f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{aligned}$$

## Zustandsraumbeschreibung für I/O-Beziehung

$$\mathcal{S} : u \mapsto y, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

Beachte: Operator  $\mathcal{S}$  ungeeignet für Approximation, da Singulärwerte kontinuierlich; für Modellreduktion verwende Hankel-Operator

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^0 h(t - \tau) u(\tau) d\tau \text{ für alle } t > 0.$$

$\mathcal{H}$  kompakt + beschränkt  $\Rightarrow \mathcal{H}$  besitzt diskrete SVD

$\Rightarrow$  Best-Approx.-Problem bzgl. 2-ind. Operatornorm wohlgestellt

$\Rightarrow$  gelöst von Adamjan-Arov-Krein (AAK Theorie, 1971/78).



# Lineare Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Definition: lineare, zeitinvariante Systeme

$$\begin{aligned} f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{aligned}$$

## Zustandsraumbeschreibung für I/O-Beziehung

$$\mathcal{S} : u \mapsto y, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

Beachte: Operator  $\mathcal{S}$  ungeeignet für Approximation, da Singulärwerte kontinuierlich; für Modellreduktion verwende **Hankel-Operator**

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^0 h(t - \tau)u(\tau) d\tau \text{ für alle } t > 0.$$

$\mathcal{H}$  kompakt + beschränkt  $\Rightarrow \mathcal{H}$  besitzt diskrete SVD

$\Rightarrow$  Best-Approx.-Problem bzgl. 2-ind. Operatornorm wohlgestellt

$\Rightarrow$  gelöst von Adamjan-Arov-Krein (AAK Theorie, 1971/78).



# Lineare Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Definition: lineare, zeitinvariante Systeme

$$\begin{aligned} f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{aligned}$$

## Zustandsraumbeschreibung für I/O-Beziehung

$$\mathcal{S} : u \mapsto y, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

Beachte: Operator  $\mathcal{S}$  ungeeignet für Approximation, da Singulärwerte kontinuierlich; für Modellreduktion verwende Hankel-Operator

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^0 h(t - \tau)u(\tau) d\tau \text{ für alle } t > 0.$$

**$\mathcal{H}$  kompakt + beschränkt  $\Rightarrow \mathcal{H}$  besitzt diskrete SVD**

$\Rightarrow$  Best-Approx.-Problem bzgl. 2-ind. Operatornorm wohlgestellt

$\Rightarrow$  gelöst von Adamjan-Arov-Krein (AAK Theorie, 1971/78).



# Lineare Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Definition: lineare, zeitinvariante Systeme

$$\begin{aligned} f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{aligned}$$

## Zustandsraumbeschreibung für I/O-Beziehung

$$\mathcal{S} : u \mapsto y, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

Beachte: Operator  $\mathcal{S}$  ungeeignet für Approximation, da Singulärwerte kontinuierlich; für Modellreduktion verwende Hankel-Operator

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^0 h(t - \tau)u(\tau) d\tau \text{ für alle } t > 0.$$

$\mathcal{H}$  kompakt + beschränkt  $\Rightarrow \mathcal{H}$  besitzt diskrete SVD

$\Rightarrow$  Best-Approx.-Problem bzgl. 2-ind. Operatornorm wohlgestellt

$\Rightarrow$  gelöst von **Adamjan-Arov-Krein (AAK Theorie, 1971/78)**.



# Lineare Systeme im Frequenzraum

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Laplace-Transformation / Frequenzraum

Anwendung der **Laplace-Transformation** ( $x(t) \mapsto x(s)$ ,  $\dot{x}(t) \mapsto sx(s)$ )  
auf das lineare System für  $x(0) = 0$ :

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad y(s) = Bx(s) + Du(s),$$

liefert Zustandsraumbeschreibung für I/O-Beziehung im  
Frequenzraum:

$$y(s) = \underbrace{\left( B(sI_n - A)^{-1}C + D \right)}_{=:G(s)} u(s)$$

$G$  heißt Transferfunktion von  $\Sigma$ .



# Lineare Systeme im Frequenzraum

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Laplace-Transformation / Frequenzraum

Anwendung der Laplace-Transformation ( $x(t) \mapsto x(s)$ ,  $\dot{x}(t) \mapsto sx(s)$ )  
auf das lineare System für  $x(0) = 0$ :

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad y(s) = Bx(s) + Du(s),$$

liefert Zustandsraumbeschreibung für I/O-Beziehung im  
Frequenzraum:

$$y(s) = \underbrace{\left( B(sI_n - A)^{-1}C + D \right)}_{=: G(s)} u(s)$$

$G$  heißt **Transferfunktion** von  $\Sigma$ .



# Modellreduktion für lineare Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Problemstellung

Approximiere das dynamische System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{aligned}$$

durch ein reduziertes Modell

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, & \hat{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}, & \hat{B} \in \mathbb{R}^{r \times m}, \\ \hat{y} &= \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u, & \hat{C} \in \mathbb{R}^{p \times r}, & \hat{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{aligned}$$

der **Ordnung**  $r \ll n$ , so daß

$$\|y - \hat{y}\| = \|Gu - \hat{G}u\| \leq \|G - \hat{G}\| \|u\| < \text{Toleranz} \cdot \|u\|$$

$\implies$  Approximationsproblem  $\min_{\text{degree}(\hat{G}) \leq r} \|G - \hat{G}\|$ .



# Modellreduktion für lineare Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Problemstellung

Approximiere das dynamische System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{aligned}$$

durch ein reduziertes Modell

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, & \hat{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}, & \hat{B} \in \mathbb{R}^{r \times m}, \\ \hat{y} &= \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u, & \hat{C} \in \mathbb{R}^{p \times r}, & \hat{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{aligned}$$

der **Ordnung**  $r \ll n$ , so daß

$$\|y - \hat{y}\| = \|Gu - \hat{G}u\| \leq \|G - \hat{G}\| \|u\| < \text{Toleranz} \cdot \|u\|$$

$\implies$  Approximationsproblem  $\min_{\text{degree}(\hat{G}) \leq r} \|G - \hat{G}\|$ .



# Mikrosystemtechnik (MST)

## Definition

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Definition

Die **Mikrosystemtechnik (MST)** bearbeitet Strukturen im Mikrometerbereich ( $\mu$ ). Sie kombiniert Mikroelektronik, Mikromechanik, Mikrofluidik und Mikrooptik, aber auch Entwicklungen der Biotechnologie und Nanotechnologie, indem sie Strukturen aus diesen Bereichen zu neuen Systemen vereinigt. In diesen Systemen wirken Sensoren und Aktoren zusammen.

MST beschäftigt sich mit dem Entwurf und der Herstellung von mikroelektronischen Schaltungen und mikromechanischer und mikrooptischer Bauelemente in Halbleitermaterialien wie kristallinem Silizium oder Gallium-Arsenid.

Häufige Bezeichnung: MicroElectroMechanicalSystems (MEMS).

Quelle: WIKIPEDIA, <http://de.wikipedia.org>



# Mikrosystemtechnik (MST)

## Definition

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Definition

Die **Mikrosystemtechnik (MST)** bearbeitet Strukturen im Mikrometerbereich ( $\mu$ ). Sie kombiniert Mikroelektronik, Mikromechanik, Mikrofluidik und Mikrooptik, aber auch Entwicklungen der Biotechnologie und Nanotechnologie, indem sie Strukturen aus diesen Bereichen zu neuen Systemen vereinigt. In diesen Systemen wirken Sensoren und Aktoren zusammen.

MST beschäftigt sich mit dem Entwurf und der Herstellung von mikroelektronischen Schaltungen und mikromechanischer und mikrooptischer Bauelemente in Halbleitermaterialien wie kristallinem Silizium oder Gallium-Arsenid.

Häufige Bezeichnung: MicroElectroMechanicalSystems (MEMS).

Quelle: WIKIPEDIA, <http://de.wikipedia.org>



# Mikrosystemtechnik (MST)

## Definition

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Definition

Die Mikrosystemtechnik (MST) bearbeitet Strukturen im Mikrometerbereich ( $\mu$ ). Sie kombiniert Mikroelektronik, Mikromechanik, Mikrofluidik und Mikrooptik, aber auch Entwicklungen der Biotechnologie und Nanotechnologie, indem sie Strukturen aus diesen Bereichen zu neuen Systemen vereinigt. In diesen Systemen wirken Sensoren und Aktoren zusammen.

MST beschäftigt sich mit dem Entwurf und der Herstellung von mikroelektronischen Schaltungen und mikromechanischer und mikrooptischer Bauelemente in Halbleitermaterialien wie kristallinem Silizium oder Gallium-Arsenid.

Häufige Bezeichnung: **MicroElectroMechanicalSystems (MEMS)**.

Quelle: WIKIPEDIA, <http://de.wikipedia.org>



# MST

## Beispiele

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Bubble-Jet Druckköpfe moderner Drucker (Kombination mikrometerfeiner Düsen mit Heizelementen),
- Moderne Automobiltechnik: Airbag-Sensoren, ESP, ...
- Instrumente der minimal-invasiven Chirurgie (Endoskope),
- chemische Sensoren für die Lebensmittelüberwachung,
- Mikroprozessoren.



# Benchmarks: Mikroschubdüse (Microrthruster)

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

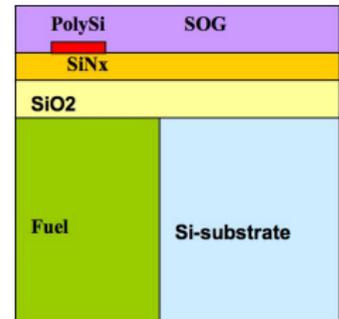
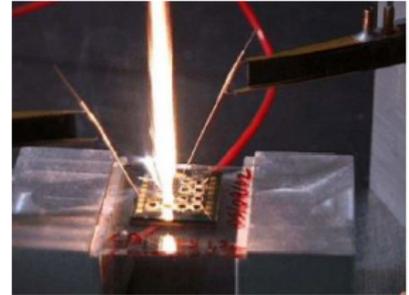
Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Anwendung: Nanosatelliten
- Ziel: Zündung von Festbrennstoffen durch elektrische Impulse
- Thermodynamisches Modell, Zündungsimpuls durch Erhitzung eines elektrischen Widerstandes über angelegte Spannung.
- Designproblem: Erreichen der Zündtemperatur einer Brennstoffzelle, ohne benachbarte Zellen zu zünden.
- FEM-Ortsdiskretisierung für thermodynamisches Modell liefert lineares System,  $m = 1$ ,  $p = 7$ .  
(2D:  $n = 11,445$ , 3D:  $n = 79,171$ )



Quelle: The Oberwolfach Benchmark Collection <http://www.intek.de/simulation/benchmark>



# Benchmarks: Mikrogyroskop (Butterfly gyro)

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

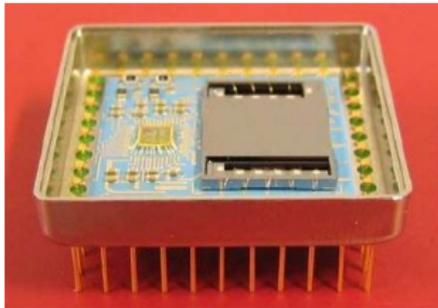
Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

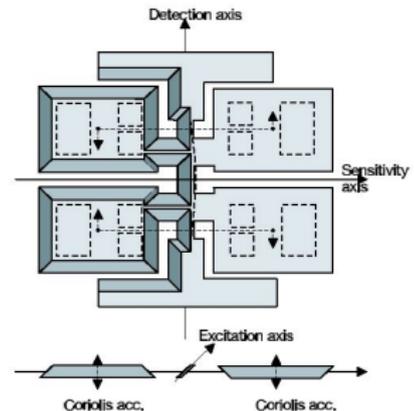
Ausblick

Referenzen



- Anregung der Elektroden durch angelegte Spannung läßt Flügel vibrieren, durch Coriolis-Kraft erzeugte Rotation liefert Sensordaten.
- FEM-Modell:  $n = 34,722$ ,  
 $m = 1$ ,  $p = 12$ .

- Anwendung: Inertialnavigation (Trägheitsnavigation)
- Sensor zur Positionsbestimmung aus Beschleunigung und Drehung.



Quelle: The Oberwolfach Benchmark Collection <http://www.imtek.de/simulation/benchmark>



# Mikroelektronik

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- **Fortschreitende Miniaturisierung: Moore's Law** besagt, daß sich die Anzahl der Transistoren auf einem Chip alle 12 (später 18) Monate verdoppelt.
- Verifikation von VLSI/ULSI Chip Entwürfen erfordert hohe Anzahl an Simulationsläufen für verschiedenste Eingangssignale.
- Durch immer weiter erhöhte Packungsdichte liegen Leiterbahnen so dicht, daß diese mitmodelliert werden müssen, um sicher zu stellen, daß thermische/elektromagnetische Effekte die Signalübertragung nicht stören.
- Lineare Systeme in der Mikroelektronik entstehen bei modifizierter Knotenanalyse (MNA) für RLC Netzwerke, z.B. bei



# Mikroelektronik

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Fortschreitende Miniaturisierung: **Moore's Law** besagt, daß sich die Anzahl der Transistoren auf einem Chip alle 12 (später 18) Monate verdoppelt.
- **Verifikation von VLSI/ULSI Chip Entwürfen erfordert hohe Anzahl an Simulationsläufen für verschiedenste Eingangssignale.**
- Durch immer weiter erhöhte Packungsdichte liegen Leiterbahnen so dicht, daß diese mitmodelliert werden müssen, um sicher zu stellen, daß thermische/elektromagnetische Effekte die Signalübertragung nicht stören.
- Lineare Systeme in der Mikroelektronik entstehen bei modifizierter Knotenanalyse (MNA) für RLC Netzwerke, z.B. bei



# Mikroelektronik

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Fortschreitende Miniaturisierung: **Moore's Law** besagt, daß sich die Anzahl der Transistoren auf einem Chip alle 12 (später 18) Monate verdoppelt.
- Verifikation von VLSI/ULSI Chip Entwürfen erfordert hohe Anzahl an Simulationsläufen für verschiedenste Eingangssignale.
- Durch immer weiter erhöhte Packungsdichte liegen Leiterbahnen so dicht, daß diese mitmodelliert werden müssen, um sicher zu stellen, daß thermische/elektromagnetische Effekte die Signalübertragung nicht stören.
- Lineare Systeme in der Mikroelektronik entstehen bei modifizierter Knotenanalyse (MNA) für RLC Netzwerke, z.B. bei



# Mikroelektronik

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Fortschreitende Miniaturisierung: **Moore's Law** besagt, daß sich die Anzahl der Transistoren auf einem Chip alle 12 (später 18) Monate verdoppelt.
- Verifikation von VLSI/ULSI Chip Entwürfen erfordert hohe Anzahl an Simulationsläufen für verschiedenste Eingangssignale.
- Durch immer weiter erhöhte Packungsdichte liegen Leiterbahnen so dicht, daß diese mitmodelliert werden müssen, um sicher zu stellen, daß thermische/elektromagnetische Effekte die Signalübertragung nicht stören.
- **Lineare Systeme in der Mikroelektronik entstehen bei modifizierter Knotenanalyse (MNA) für RLC Netzwerke, z.B. bei**



# Mikroelektronik

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Fortschreitende Miniaturisierung: **Moore's Law** besagt, daß sich die Anzahl der Transistoren auf einem Chip alle 12 (später 18) Monate verdoppelt.
- Verifikation von VLSI/ULSI Chip Entwürfen erfordert hohe Anzahl an Simulationsläufen für verschiedenste Eingangssignale.
- Durch immer weiter erhöhte Packungsdichte liegen Leiterbahnen so dicht, daß diese mitmodelliert werden müssen, um sicher zu stellen, daß thermische/elektromagnetische Effekte die Signalübertragung nicht stören.
- Lineare Systeme in der Mikroelektronik entstehen bei modifizierter Knotenanalyse (MNA) für RLC Netzwerke, z.B. bei
  - **Entkopplung von linearen Anteilen von VLSI Chips,**
    - Modellierung der Leiterbahnen,
    - Modellierung der Ladungen von Pins in VLSI Chips,
    - Linearisierung um Arbeitspunkte.



# Mikroelektronik

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Fortschreitende Miniaturisierung: **Moore's Law** besagt, daß sich die Anzahl der Transistoren auf einem Chip alle 12 (später 18) Monate verdoppelt.
- Verifikation von VLSI/ULSI Chip Entwürfen erfordert hohe Anzahl an Simulationsläufen für verschiedenste Eingangssignale.
- Durch immer weiter erhöhte Packungsdichte liegen Leiterbahnen so dicht, daß diese mitmodelliert werden müssen, um sicher zu stellen, daß thermische/elektromagnetische Effekte die Signalübertragung nicht stören.
- Lineare Systeme in der Mikroelektronik entstehen bei modifizierter Knotenanalyse (MNA) für RLC Netzwerke, z.B. bei
  - Entkopplung von linearen Anteilen von VLSI Chips,
  - **Modellierung der Leiterbahnen,**
  - Modellierung der Ladungen von Pins in VLSI Chips,
  - Linearisierung um Arbeitspunkte.



# Mikroelektronik

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Fortschreitende Miniaturisierung: **Moore's Law** besagt, daß sich die Anzahl der Transistoren auf einem Chip alle 12 (später 18) Monate verdoppelt.
- Verifikation von VLSI/ULSI Chip Entwürfen erfordert hohe Anzahl an Simulationsläufen für verschiedenste Eingangssignale.
- Durch immer weiter erhöhte Packungsdichte liegen Leiterbahnen so dicht, daß diese mitmodelliert werden müssen, um sicher zu stellen, daß thermische/elektromagnetische Effekte die Signalübertragung nicht stören.
- Lineare Systeme in der Mikroelektronik entstehen bei modifizierter Knotenanalyse (MNA) für RLC Netzwerke, z.B. bei
  - Entkopplung von linearen Anteilen von VLSI Chips,
  - Modellierung der Leiterbahnen,
  - **Modellierung der Ladungen von Pins in VLSI Chips,**
  - Linearisierung um Arbeitspunkte.



# Mikroelektronik

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Fortschreitende Miniaturisierung: **Moore's Law** besagt, daß sich die Anzahl der Transistoren auf einem Chip alle 12 (später 18) Monate verdoppelt.
- Verifikation von VLSI/ULSI Chip Entwürfen erfordert hohe Anzahl an Simulationsläufen für verschiedenste Eingangssignale.
- Durch immer weiter erhöhte Packungsdichte liegen Leiterbahnen so dicht, daß diese mitmodelliert werden müssen, um sicher zu stellen, daß thermische/elektromagnetische Effekte die Signalübertragung nicht stören.
- Lineare Systeme in der Mikroelektronik entstehen bei modifizierter Knotenanalyse (MNA) für RLC Netzwerke, z.B. bei
  - Entkopplung von linearen Anteilen von VLSI Chips,
  - Modellierung der Leiterbahnen,
  - Modellierung der Ladungen von Pins in VLSI Chips,
  - **Linearisierung um Arbeitspunkte.**



# Mikroelektronik

## Miniaturisierungsbeispiel

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

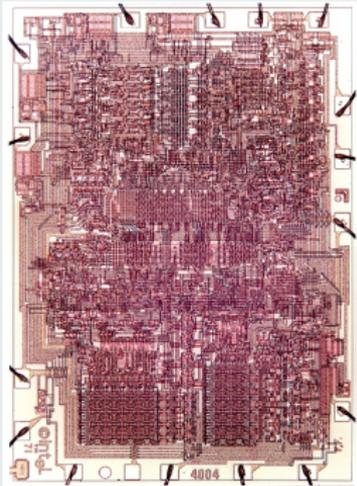
Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

### Intel 4004 (1971)



- 1-lagig, Bauelemente  $\sim 10\mu$
- 2,300 Transistoren
- 64 kHz Taktfrequenz

### Intel Pentium IV (2001)



- 7-lagig, Bauelemente  $\sim 0.18\mu$
- 42,000,000 Transistoren
- 2 GHz Taktfrequenz
- **2km Leiterbahnen**



# Gekoppelte Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

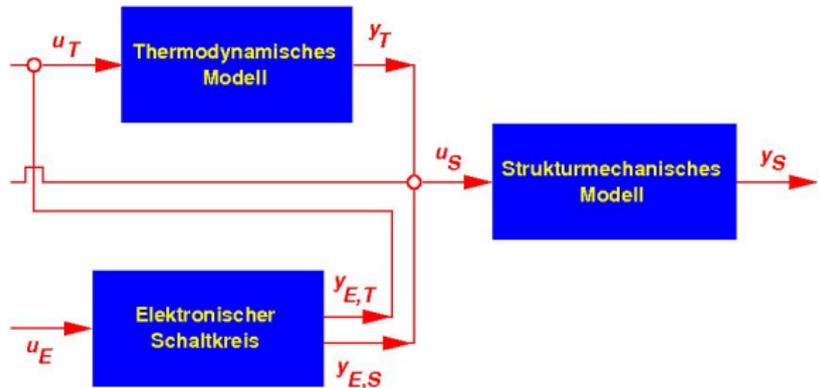
Beispiele

Ausblick

Referenzen

Typische Problemstellung bei der Simulation von MEMS:  
Kopplung (oft über Randbedingungen) verschiedener Modelle in einer  
Simulation  $\rightsquigarrow$  **Probleme und Herausforderungen:**

- Zu hohe Simulationszeiten aufgrund hoher Dimensionen der einzelnen Modelle.
- Kopplung stabiler dynamischer Systeme liefert nicht notwendigerweise stabiles Gesamtsystem.
- Multiskalenphänomene.





# Gekoppelte Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

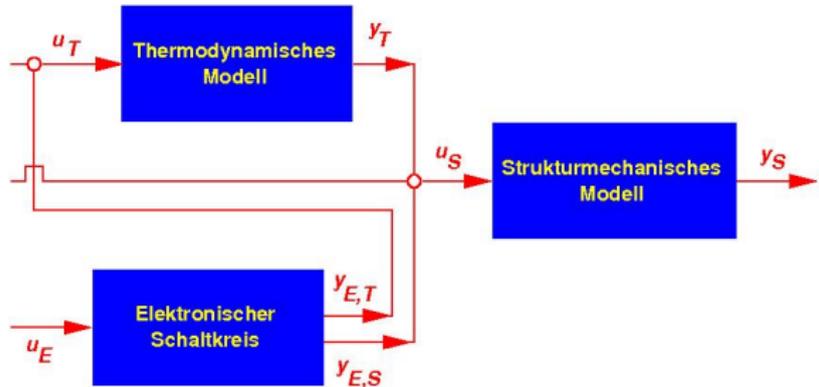
Beispiele

Ausblick

Referenzen

Typische Problemstellung bei der Simulation von MEMS:  
Kopplung (oft über Randbedingungen) verschiedener Modelle in einer  
Simulation  $\rightsquigarrow$  **Probleme und Herausforderungen:**

- Zu hohe Simulationszeiten aufgrund hoher Dimensionen der einzelnen Modelle.
- Kopplung stabiler dynamischer Systeme liefert nicht notwendigerweise stabiles Gesamtsystem.
- Multiskalenphänomene.





# Gekoppelte Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

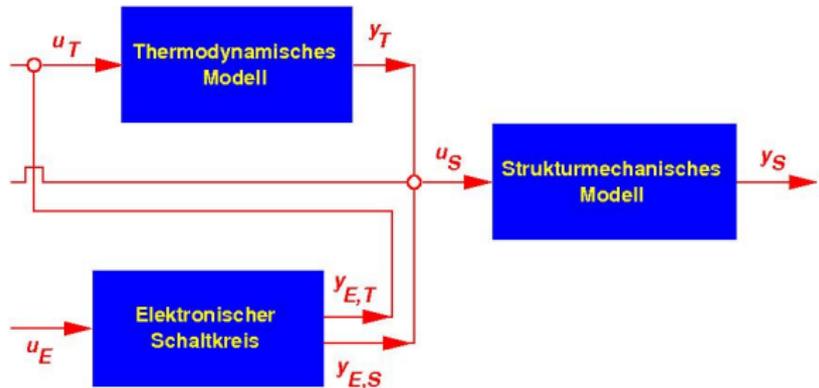
Beispiele

Ausblick

Referenzen

Typische Problemstellung bei der Simulation von MEMS:  
Kopplung (oft über Randbedingungen) verschiedener Modelle in einer  
Simulation  $\rightsquigarrow$  **Probleme und Herausforderungen:**

- Zu hohe Simulationszeiten aufgrund hoher Dimensionen der einzelnen Modelle.
- Kopplung stabiler dynamischer Systeme liefert nicht notwendigerweise stabiles Gesamtsystem.
- Multiskalenphänomene.





# Gekoppelte Systeme

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung  
Modellreduktion  
MST

Modellreduktion

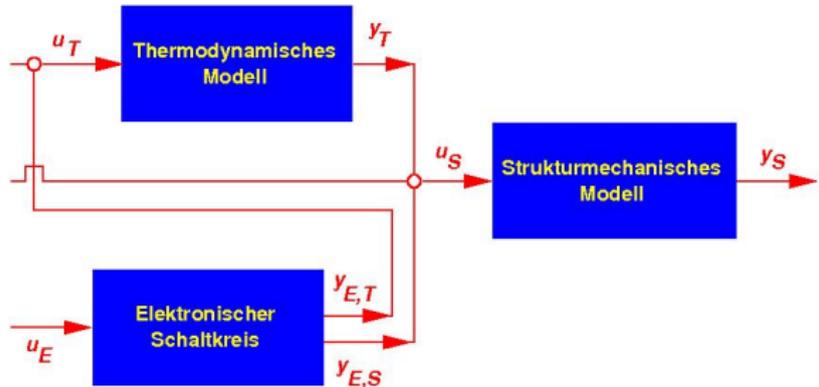
Beispiele

Ausblick

Referenzen

Typische Problemstellung bei der Simulation von MEMS:  
Kopplung (oft über Randbedingungen) verschiedener Modelle in einer  
Simulation  $\rightsquigarrow$  **Probleme und Herausforderungen:**

- Zu hohe Simulationszeiten aufgrund hoher Dimensionen der einzelnen Modelle.
- Kopplung stabiler dynamischer Systeme liefert nicht notwendigerweise stabiles Gesamtsystem.
- Multiskalenphänomene.





# Ziele

- **Automatische Generierung von reduzierten Modellen.**
- Einhaltung vorgegebener Fehlertoleranz für alle zulässigen Eingangssignale gemäß

$$\|y - \hat{y}\| < \text{Toleranz} \cdot \|u\|$$

⇒ benötige berechenbare Fehler(ab)schätzung!

- Erhalte physikalische Eigenschaften



# Ziele

- Automatische Generierung von reduzierten Modellen.
- Einhaltung vorgegebener Fehlertoleranz für alle zulässigen Eingangssignale gemäß

$$\|y - \hat{y}\| < \text{Toleranz} \cdot \|u\|$$

⇒ benötige berechenbare Fehler(ab)schätzung!

- Erhalte physikalische Eigenschaften



# Ziele

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Automatische Generierung von reduzierten Modellen.
- Einhaltung vorgegebener Fehlertoleranz für alle zulässigen Eingangssignale gemäß

$$\|y - \hat{y}\| < \text{Toleranz} \cdot \|u\|$$

⇒ benötige berechenbare Fehler(ab)schätzung!

- **Erhalte physikalische Eigenschaften**



# Ziele

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Automatische Generierung von reduzierten Modellen.
- Einhaltung vorgegebener Fehlertoleranz für alle zulässigen Eingangssignale gemäß

$$\|y - \hat{y}\| < \text{Toleranz} \cdot \|u\|$$

⇒ benötige berechenbare Fehler(ab)schätzung!

- Erhalte physikalische Eigenschaften

- **Stabilität** ( $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$ )
  - Phase (Nullstellen von  $G$ )
  - Passivität:

$$\int_{-\infty}^t u(\tau)^T y(\tau) d\tau \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m).$$

*“System erzeugt keine Energie.”*



# Ziele

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Automatische Generierung von reduzierten Modellen.
- Einhaltung vorgegebener Fehlertoleranz für alle zulässigen Eingangssignale gemäß

$$\|y - \hat{y}\| < \text{Toleranz} \cdot \|u\|$$

⇒ benötige berechenbare Fehler(ab)schätzung!

- Erhalte physikalische Eigenschaften
  - Stabilität ( $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$ )
  - Phase (Nullstellen von  $G$ )
  - Passivität:

$$\int_{-\infty}^t u(\tau)^T y(\tau) d\tau \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m).$$

*“System erzeugt keine Energie.”*



# Ziele

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Automatische Generierung von reduzierten Modellen.
- Einhaltung vorgegebener Fehlertoleranz für alle zulässigen Eingangssignale gemäß

$$\|y - \hat{y}\| < \text{Toleranz} \cdot \|u\|$$

⇒ benötige berechenbare Fehler(ab)schätzung!

- Erhalte physikalische Eigenschaften
  - Stabilität ( $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$ )
  - Phase (Nullstellen von  $G$ )
  - **Passivität:**

$$\int_{-\infty}^t u(\tau)^T y(\tau) d\tau \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m).$$

*“System erzeugt keine Energie.”*



# Modellreduktion

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- Kompakte Modellierung
- Modales Abschneiden
- Guyan-Reduktion/Substrukturierung
- Padé-Approximation und Krylovraumverfahren
- Balancierungstechniken



# Kompakte Modellierung

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion  
Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

Ersetze dynamisches System durch **Ersatzschaltbild**.  
Ersatzschaltbild = elektrisches Netzwerk.

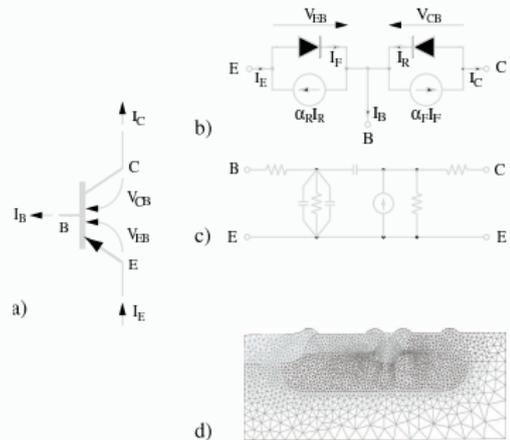
Beispiel: PNP Transistor

Vollständige Beschreibung erfordert Kombination von Transportgleichung, Maxwellgleichung, Poisson-Boltzmann-Gleichung.

Ersatzschaltung: Modellierung durch 2 Dioden.

Weitere Vereinfachung für Analyse kleiner Signale im Wesentlichen durch einfaches RLC Netzwerk.

Problem: Weder automatische Modellgenerierung noch Fehlerabschätzungen.





# Kompakte Modellierung

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

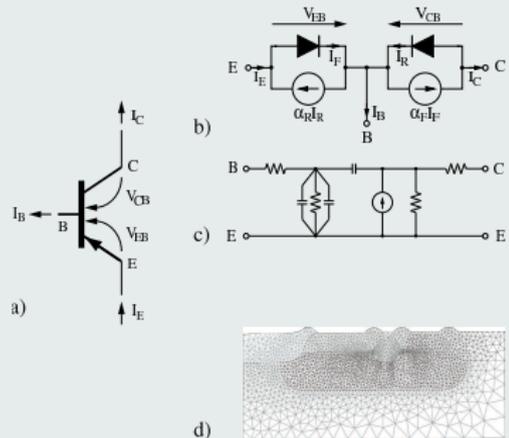
Ersetze dynamisches System durch **Ersatzschaltbild**.  
Ersatzschaltbild = elektrisches Netzwerk.

Beispiel: PNP Transistor

Vollständige Beschreibung erfordert Kombination von Transportgleichung, Maxwellgleichung, Poisson-Boltzmann-Gleichung.

Ersatzschaltung: Modellierung durch 2 Dioden.

Weitere Vereinfachung für Analyse kleiner Signale im Wesentlichen durch einfaches RLC Netzwerk.



Problem: Weder automatische Modellgenerierung noch Fehlerabschätzungen.



# Kompakte Modellierung

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

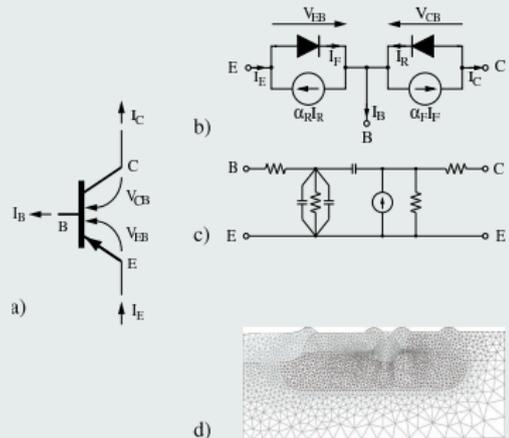
Ersetze dynamisches System durch **Ersatzschaltbild**.  
Ersatzschaltbild = elektrisches Netzwerk.

Beispiel: PNP Transistor

Vollständige Beschreibung erfordert Kombination von Transportgleichung, Maxwellgleichung, Poisson-Boltzmann-Gleichung.

Ersatzschaltung: Modellierung durch 2 Dioden.

Weitere Vereinfachung für Analyse kleiner Signale im Wesentlichen durch einfaches RLC Netzwerk.



**Problem: Weder automatische Modellgenerierung noch Fehlerabschätzungen.**



# Modales Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

Projiziere Zustandsraum auf  $A$ -invarianten Unterraum  $\mathcal{V}$ , wobei

$$\mathcal{V} = \text{span}(v_1, \dots, v_r),$$

$v_k$  = Eigenvektoren zu dominanten **Moden = Eigenwerten** von  $A$ .



# Modales Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Idee:

Projiziere Zustandsraum auf  $A$ -invarianten Unterraum  $\mathcal{V}$ , wobei

$$\mathcal{V} = \text{span}(v_1, \dots, v_r),$$

$v_k$  = Eigenvektoren zu dominanten Moden = Eigenwerten von  $A$ .

## Eigenschaften:

- Einfache Berechnung für große Systeme, z.B. mit Krylovraum-Verfahren (Lanczos, Arnoldi), Jacobi-Davidson-Methode.
- Fehlerabschätzung für diagonalisierbare Matrizen:

$$\|G - \hat{G}\|_{\infty} \leq \text{cond}_2(T) \|C_2\|_2 \|B_2\|_2 \frac{1}{\min_{\lambda \in \Lambda(A_{22})} |\text{Re}(\lambda)|},$$

wobei  $T^{-1}AT = \text{diag}(A_1, A_2)$ .



# Modales Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Idee:

Projiziere Zustandsraum auf  $A$ -invarianten Unterraum  $\mathcal{V}$ , wobei

$$\mathcal{V} = \text{span}(v_1, \dots, v_r),$$

$v_k =$  Eigenvektoren zu dominanten Moden = Eigenwerten von  $A$ .

## Schwierigkeiten:

- Eigenwerte sind nur bei selbstadjungierten Problemen relevant.
- Dominanzmaße schwierig zu berechnen.  
(Litz (1979): Verwendet Jordan-Normalform)
- Für Fehlerabschätzung benötige gesamte Eigenvektormatrix.



# Guyan-Reduktion (Statische Kondensation)

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Idee:

- Komponenten  $x_j(t)$  werden als Zustände im Knoten  $j$  eines (FE-)Netzes betrachtet.
- Sortiere und partitioniere Zustandsvektor  $x = \begin{bmatrix} x_e \\ x_i \end{bmatrix}$  mit
  - $x_e \in \mathbb{R}^r$  — äußere Knoten (**Master-Knoten**),
  - $x_i \in \mathbb{R}^{n-r}$  — innere Knoten.
- Eliminiere alle inneren Knoten, mathematisch:

$$\hat{A} = A_e - A_{ei}A_i^{-1}A_{ie}$$

**Schur-Komplement** von  $A_i$  bzgl.  $A = \begin{bmatrix} A_e & A_{ei} \\ A_{ie} & A_i \end{bmatrix}$ .

- Löse nach  $x_e$  auf.



# Guyan-Reduktion (Statische Kondensation)

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Eigenschaften:

- + Einfache Berechnung für große Systeme mit definiter  $A$ -Matrix, z.B. mit CG.
- + Natürlicher Ansatz im Zusammenhang mit Gebietszerlegungsmethoden.
- ± In ANSYS als Dimensionsreduktionsverfahren implementiert.
- ± Hierarchische Anwendung (**Substrukturierung**) in der modalen Basis (**Craig-Bampton-Verfahren**) liefert brauchbare Methoden für Anwendungen in der Strukturmechanik.
- Dynamik des Systems wird ignoriert.



# Padé-Approximation

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

- Betrachte

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

mit Transferfunktion  $G(s) = C(sE - A)^{-1}B$ .



# Padé-Approximation

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

- Betrachte

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

mit Transferfunktion  $G(s) = C(sE - A)^{-1}B$ .

- Für  $m = p = 1$  und  $s_0 \notin \Lambda(A, E)$

$$\begin{aligned} G(s) &= C((s_0E - A) + (s - s_0)E)^{-1}B \\ &= C(I - (s - s_0)(s_0E - A)^{-1}E)^{-1}(s_0E - A)^{-1}B \\ &= m_0 + m_1(s - s_0) + m_2(s - s_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

- Für  $s_0 = 0$ :  $m_j := C(A^{-1}E)^j A^{-1}B =$  Momente.
- Für  $s_0 = \infty$ :  $m_j := C(E^{-1}A)^j E^{-1}B =$  Markov-Parameter.



# Padé-Approximation

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

- Betrachte

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

mit Transferfunktion  $G(s) = C(sE - A)^{-1}B$ .

- Für  $m = p = 1$  und  $s_0 \notin \Lambda(A, E)$

$$\begin{aligned} G(s) &= C((s_0E - A) + (s - s_0)E)^{-1}B \\ &= C(I - (s - s_0)(s_0E - A)^{-1}E)^{-1}(s_0E - A)^{-1}B \\ &= m_0 + m_1(s - s_0) + m_2(s - s_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

- Für  $s_0 = 0$ :  $m_j := C(A^{-1}E)^j A^{-1}B =$  Momente.
- Für  $s_0 = \infty$ :  $m_j := C(E^{-1}A)^j E^{-1}B =$  Markov-Parameter.



# Padé-Approximation

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Idee:

- Betrachte

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

mit Transferfunktion  $G(s) = C(sE - A)^{-1}B$ .

- Für  $m = p = 1$  und  $s_0 \notin \Lambda(A, E)$

$$\begin{aligned} G(s) &= C((s_0E - A) + (s - s_0)E)^{-1}B \\ &= C(I - (s - s_0)(s_0E - A)^{-1}E)^{-1}(s_0E - A)^{-1}B \\ &= m_0 + m_1(s - s_0) + m_2(s - s_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

- Für  $s_0 = 0$ :  $m_j := C(A^{-1}E)^j A^{-1}B =$  Momente.
- Für  $s_0 = \infty$ :  $m_j := C(E^{-1}A)^j E^{-1}B =$  Markov-Parameter.



# Padé-Approximation

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Idee:

- Betrachte

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

mit Transferfunktion  $G(s) = C(sE - A)^{-1}B$ .

- Für  $m = p = 1$  und  $s_0 \notin \Lambda(A, E)$

$$\begin{aligned} G(s) &= C((s_0E - A) + (s - s_0)E)^{-1}B \\ &= C(I - (s - s_0)(s_0E - A)^{-1}E)^{-1}(s_0E - A)^{-1}B \\ &= m_0 + m_1(s - s_0) + m_2(s - s_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

- Für  $s_0 = 0$ :  $m_j := C(A^{-1}E)^j A^{-1}B =$  **Momente**.
- Für  $s_0 = \infty$ :  $m_j := C(E^{-1}A)^j E^{-1}B =$  **Markov-Parameter**.



# Padé-Approximation

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

- Betrachte

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

mit Transferfunktion  $G(s) = C(sE - A)^{-1}B$ .

- Approximiere  $G(s)$  durch rationale Funktion

$$\hat{G}(s) = \frac{\alpha_{r-1}s^{r-1} + \alpha_{r-2}s^{r-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}{\beta_r s^r + \beta_{r-1}s^{r-1} + \dots + \beta_1s + 1}$$

Die  $r$ -te **Padé-Approximation** ist definiert durch

$$G(s) = \hat{G}(s) + \mathcal{O}((s - s_0)^{2r}).$$

d.h.  $m_j = \hat{m}_j$  für  $j = 1, \dots, 2r - 1 \rightsquigarrow$  **Moment Matching**.



# Padé-Approximation

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Asymptotic Waveform Evaluation (AWE):

Lösung des Padé-Approximations-Problems:

$$M \begin{bmatrix} \beta_r \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_r \\ \vdots \\ m_{2r-1} \end{bmatrix},$$

mit der **Hankel-Matrix**

$$M = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_{r-1} \\ m_1 & m_2 & & \ddots & m_r \\ m_2 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ m_{r-1} & m_r & \dots & & m_{2r-2} \end{bmatrix}.$$

Dann gilt mit  $\beta_0 := 1$ :  $\alpha_j = \sum_{k=0}^j m_k \beta_{j-k}$ .



# Padé-Approximation

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Bemerkungen:

- AWE ist numerisch instabil, da explizite Berechnung der Momente Potenzen von Matrizen erfordert.
- Besser: Padé-via-Lanczos Methode (PVL).  
GALLIVAN/GRIMME/VAN DOOREN 1994, FREUND/FELDMANN 1996  
Mit unsymm. Lanczos vermeide explizite Momentenberechnung.  
Bemerkung: Arnoldi-Verfahren liefert i.a. nur

$$G(s) = \hat{G}(s) + \mathcal{O}((s - s_0)^r).$$

- PVL ist meist verwendetes Verfahren in der Mikroelektronik.
- Nachteile:
  - Keine berechenbaren Fehlerabschätzungen.
  - Nur heuristische Kriterien für Wahl der Entwicklungspunkte.
  - Nur lokal gute Approximationseigenschaften.
  - Erhaltung physikalischer Eigenschaften nur in Spezialfällen.



# Padé-Approximation

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Bemerkungen:

- AWE ist numerisch instabil, da explizite Berechnung der Momente Potenzen von Matrizen erfordert.
- Besser: **Padé-via-Lanczos Methode (PVL)**.  
GALLIVAN/GRIMME/VAN DOOREN 1994, FREUND/FELDMANN 1996  
Mit unsymm. Lanczos vermeide explizite Momentenberechnung.  
Bemerkung: Arnoldi-Verfahren liefert i.a. nur

$$G(s) = \hat{G}(s) + \mathcal{O}((s - s_0)^r).$$

- PVL ist meist verwendetes Verfahren in der Mikroelektronik.
- Nachteile:
  - Keine berechenbaren Fehlerabschätzungen.
  - Nur heuristische Kriterien für Wahl der Entwicklungspunkte.
  - Nur lokal gute Approximationseigenschaften.
  - Erhaltung physikalischer Eigenschaften nur in Spezialfällen.



# Padé-Approximation

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Bemerkungen:

- AWE ist numerisch instabil, da explizite Berechnung der Momente Potenzen von Matrizen erfordert.
- Besser: Padé-via-Lanczos Methode (PVL).  
GALLIVAN/GRIMME/VAN DOOREN 1994, FREUND/FELDMANN 1996  
Mit unsymm. Lanczos vermeide explizite Momentenberechnung.  
Bemerkung: Arnoldi-Verfahren liefert i.a. nur

$$G(s) = \hat{G}(s) + \mathcal{O}((s - s_0)^r).$$

- PVL ist meist verwendetes Verfahren in der Mikroelektronik.
- Nachteile:
  - Keine berechenbaren Fehlerabschätzungen.
  - Nur heuristische Kriterien für Wahl der Entwicklungspunkte.
  - Nur lokal gute Approximationseigenschaften.
  - Erhaltung physikalischer Eigenschaften nur in Spezialfällen.



# Padé-Approximation

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Bemerkungen:

- AWE ist numerisch instabil, da explizite Berechnung der Momente Potenzen von Matrizen erfordert.
- Besser: Padé-via-Lanczos Methode (PVL).  
GALLIVAN/GRIMME/VAN DOOREN 1994, FREUND/FELDMANN 1996  
Mit unsymm. Lanczos vermeide explizite Momentenberechnung.  
Bemerkung: Arnoldi-Verfahren liefert i.a. nur

$$G(s) = \hat{G}(s) + \mathcal{O}((s - s_0)^r).$$

- PVL ist meist verwendetes Verfahren in der Mikroelektronik.
- **Nachteile:**
  - Keine berechenbaren Fehlerabschätzungen.
  - Nur heuristische Kriterien für Wahl der Entwicklungspunkte.
  - Nur lokal gute Approximationseigenschaften.
  - Erhaltung physikalischer Eigenschaften nur in Spezialfällen.



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion  
Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

- System  $\Sigma$ , gegeben durch  $(A, B, C, D)$ , heißt **balanciert**, falls für Lösungen  $P, Q$  der **Lyapunovgleichungen**

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0,$$

gilt:  $P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  mit  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ .

- $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  sind die Hankel-Singulärwerte des Systems.
- Berechne balancierte Realisierung des Systems durch Zustandsraumtransformation

$$\begin{aligned} T : (A, B, C, D) &\mapsto (TAT^{-1}, TB, T^{-1}C, D) \\ &= \left( \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, D \right) \end{aligned}$$

- Reduziertes Modell:  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}) = (A_{11}, B_1, C_1, D)$ .



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion  
Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

- System  $\Sigma$ , gegeben durch  $(A, B, C, D)$ , heißt balanciert, falls für Lösungen  $P, Q$  der Lyapunovgleichungen

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0,$$

gilt:  $P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  mit  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ .

- $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  sind die **Hankel-Singulärwerte des Systems**.
- Berechne balancierte Realisierung des Systems durch Zustandsraumtransformation

$$\begin{aligned} T : (A, B, C, D) &\mapsto (TAT^{-1}, TB, T^{-1}C, D) \\ &= \left( \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, D \right) \end{aligned}$$

- Reduziertes Modell:  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}) = (A_{11}, B_1, C_1, D)$ .



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion  
Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

- System  $\Sigma$ , gegeben durch  $(A, B, C, D)$ , heißt balanciert, falls für Lösungen  $P, Q$  der Lyapunovgleichungen

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0,$$

gilt:  $P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  mit  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ .

- $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  sind die Hankel-Singulärwerte des Systems.
- Berechne balancierte Realisierung des Systems durch **Zustandsraumtransformation**

$$\begin{aligned} T : (A, B, C, D) &\mapsto (TAT^{-1}, TB, T^{-1}C, D) \\ &= \left( \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, D \right) \end{aligned}$$

- Reduziertes Modell:  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}) = (A_{11}, B_1, C_1, D)$ .



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion  
Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

Idee:

- System  $\Sigma$ , gegeben durch  $(A, B, C, D)$ , heißt balanciert, falls für Lösungen  $P, Q$  der Lyapunovgleichungen

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0,$$

gilt:  $P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  mit  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ .

- $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  sind die Hankel-Singulärwerte des Systems.
- Berechne balancierte Realisierung des Systems durch Zustandsraumtransformation

$$\begin{aligned} T : (A, B, C, D) &\mapsto (TAT^{-1}, TB, T^{-1}C, D) \\ &= \left( \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, D \right) \end{aligned}$$

- **Reduziertes Modell:**  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}) = (A_{11}, B_1, C_1, D)$ .



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Motivation:

HSV sind invariant unter  $\mathcal{T}$  und bestimmen Energietransfer von  $u_- \mapsto y_+$  in balancierten Koordinaten:

- Minimale Energie, um  $x_0$  zu erreichen:

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \\ x(0) = x_0}} \int_{-\infty}^0 u(t)^T u(t) dt = x_0^T P^{-1} x_0 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j} x_{0,j}^2$$



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Motivation:

HSV sind invariant unter  $\mathcal{T}$  und bestimmen Energietransfer von  $u_- \mapsto y_+$  in balancierten Koordinaten:

- Minimale Energie, um  $x_0$  zu erreichen:

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \\ x(0) = x_0}} \int_{-\infty}^0 u(t)^T u(t) dt = x_0^T P^{-1} x_0 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j} x_{0,j}^2$$



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele

Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Motivation:

HSV sind invariant unter  $\mathcal{T}$  und bestimmen Energietransfer von  $u_- \mapsto y_+$  in balancierten Koordinaten:

- Minimale Energie, um  $x_0$  zu erreichen:

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \\ x(0) = x_0}} \int_{-\infty}^0 u(t)^T u(t) dt = x_0^T P^{-1} x_0 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j} x_{0,j}^2$$

- Im System enthaltene Energie für  $x(0) = x_0$  und  $u(t) \equiv 0$ :

$$\|y\|_2^2 = \int_0^{\infty} y(t)^T y(t) dt = x_0^T Q x_0 = \sum_{j=1}^n \sigma_j x_{0,j}^2$$



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion  
Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Motivation:

HSV sind invariant unter  $\mathcal{T}$  und bestimmen Energietransfer von  $u_- \mapsto y_+$  in balancierten Koordinaten:

- Minimale Energie, um  $x_0$  zu erreichen:

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \\ x(0) = x_0}} \int_{-\infty}^0 u(t)^T u(t) dt = x_0^T P^{-1} x_0 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j} x_{0,j}^2$$

- Energietransfer von  $u_-$  nach  $y_+$ :

$$E := \sup_{\substack{u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \\ x(0) = x_0}} \frac{\|y\|_2^2}{\int_{-\infty}^0 u(t)^T u(t) dt} = \frac{1}{\|x_0\|_2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 x_{0,j}^2$$

Schneide "kleine" HSV ab, analog zur SVD!



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion  
Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Berechnung:

- 1 Berechne Cholesky-Faktoren der Lösungen der Lyapunovgleichungen,

$$P = S^T S, \quad Q = R^T R.$$

- 2 Berechne SVD

$$SR^T = [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}.$$

- 3 Setze

$$T_l = \Sigma_1^{-1/2} V_1^T R, \quad T_r = S^T U_1 \Sigma_1^{-1/2}.$$

- 4 Reduziertes Modell ist  $(T_l A T_r, T_l B, C T_r, D)$ .



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion  
Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Berechnung:

- 1 Berechne Cholesky-Faktoren der Lösungen der Lyapunovgleichungen,

$$P = S^T S, \quad Q = R^T R.$$

- 2 Berechne SVD

$$SR^T = [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}.$$

- 3 Setze

$$T_l = \Sigma_1^{-1/2} V_1^T R, \quad T_r = S^T U_1 \Sigma_1^{-1/2}.$$

- 4 Reduziertes Modell ist  $(T_l A T_r, T_l B, C T_r, D)$ .



# Balanciertes Abschneiden

## Berechnung:

- 1 Berechne Cholesky-Faktoren der Lösungen der Lyapunovgleichungen,

$$P = S^T S, \quad Q = R^T R.$$

- 2 Berechne SVD

$$SR^T = [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}.$$

- 3 Setze

$$T_l = \Sigma_1^{-1/2} V_1^T R, \quad T_r = S^T U_1 \Sigma_1^{-1/2}.$$

- 4 Reduziertes Modell ist  $(T_l A T_r, T_l B, C T_r, D)$ .



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion  
Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Berechnung:

- 1 Berechne Cholesky-Faktoren der Lösungen der Lyapunovgleichungen,

$$P = S^T S, \quad Q = R^T R.$$

- 2 Berechne SVD

$$SR^T = [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}.$$

- 3 Setze

$$T_l = \Sigma_1^{-1/2} V_1^T R, \quad T_r = S^T U_1 \Sigma_1^{-1/2}.$$

- 4 Reduziertes Modell ist  $(T_l A T_r, T_l B, C T_r, D)$ .



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Eigenschaften:

- Reduziertes Modell ist stabil und balanciert.
- Adaptive Wahl von  $r$  durch berechenbare Fehlerabschätzung:

$$\|y - \hat{y}\|_2 \leq \left( 2 \sum_{k=r+1}^n \sigma_k \right) \|u\|_2.$$

- Verschiedene Varianten durch Wahl andere Gram'scher Matrizen; dadurch Erhaltung z.B. von Passivität.
- Komplexität bisher  $\mathcal{O}(n^3)$ .

Neue algorithmische Ideen der numerischen linearen Algebra  $\rightsquigarrow$ :

•  $\mathcal{O}(n^2)$  für die Berechnung von  $\sigma_k$  (Singularwertzerlegung)  $\rightsquigarrow$  balanciertes  $\mathcal{H}_2$ -Abschneiden

•  $\mathcal{O}(n)$  für die Berechnung von  $\sigma_k$  (Singularwertzerlegung)  $\rightsquigarrow$  balanciertes  $\mathcal{H}_2$ -Abschneiden



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Eigenschaften:

- Reduziertes Modell ist stabil und balanciert.
- Adaptive Wahl von  $r$  durch berechenbare Fehlerabschätzung:

$$\|y - \hat{y}\|_2 \leq \left(2 \sum_{k=r+1}^n \sigma_k\right) \|u\|_2.$$

- Verschiedene Varianten durch Wahl andere Gram'scher Matrizen; dadurch Erhaltung z.B. von Passivität.
- Komplexität bisher  $\mathcal{O}(n^3)$ .

Neue algorithmische Ideen der numerischen linearen Algebra  $\rightsquigarrow$ :



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Eigenschaften:

- Reduziertes Modell ist stabil und balanciert.
- Adaptive Wahl von  $r$  durch berechenbare Fehlerabschätzung:

$$\|y - \hat{y}\|_2 \leq \left(2 \sum_{k=r+1}^n \sigma_k\right) \|u\|_2.$$

- Verschiedene Varianten durch Wahl andere Gram'scher Matrizen; dadurch Erhaltung z.B. von Passivität.
- Komplexität bisher  $\mathcal{O}(n^3)$ .

Neue algorithmische Ideen der numerischen linearen Algebra  $\rightsquigarrow$ :



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Eigenschaften:

- Reduziertes Modell ist stabil und balanciert.
- Adaptive Wahl von  $r$  durch berechenbare Fehlerabschätzung:

$$\|y - \hat{y}\|_2 \leq \left(2 \sum_{k=r+1}^n \sigma_k\right) \|u\|_2.$$

- Verschiedene Varianten durch Wahl andere Gram'scher Matrizen; dadurch Erhaltung z.B. von Passivität.
- **Komplexität bisher  $\mathcal{O}(n^3)$ .**

Neue algorithmische Ideen der numerischen linearen Algebra  $\rightsquigarrow$ :

- Effiziente parallele Algorithmen  $\rightsquigarrow$  Software PLiCMR mit WebComputing Interface.
- Sparse Implementierung mit Hilfe sparser Lyapunov-Löser LyaPack, SpaRed mit Komplexität  $\mathcal{O}(nr^2)$ .
- Für spezielle Probleme Implementierung mit Hilfe hierarchischen Matrizen, Komplexität  $\mathcal{O}(n \log^2(n)r^2)$ .



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Eigenschaften:

- Reduziertes Modell ist stabil und balanciert.
- Adaptive Wahl von  $r$  durch berechenbare Fehlerabschätzung:

$$\|y - \hat{y}\|_2 \leq \left(2 \sum_{k=r+1}^n \sigma_k\right) \|u\|_2.$$

- Verschiedene Varianten durch Wahl andere Gram'scher Matrizen; dadurch Erhaltung z.B. von Passivität.
- Komplexität bisher  $\mathcal{O}(n^3)$ .

Neue algorithmische Ideen der numerischen linearen Algebra  $\rightsquigarrow$ :

- Effiziente parallele Algorithmen  $\rightsquigarrow$  Software **PLiCMR** mit WebComputing Interface.
- Sparse Implementierung mit Hilfe sparser Lyapunov-Löser LyaPack, SpaRed mit Komplexität  $\mathcal{O}(nr^2)$ .
- Für spezielle Probleme Implementierung mit Hilfe hierarchischen Matrizen, Komplexität  $\mathcal{O}(n \log^2(n)r^2)$ .



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Eigenschaften:

- Reduziertes Modell ist stabil und balanciert.
- Adaptive Wahl von  $r$  durch berechenbare Fehlerabschätzung:

$$\|y - \hat{y}\|_2 \leq \left(2 \sum_{k=r+1}^n \sigma_k\right) \|u\|_2.$$

- Verschiedene Varianten durch Wahl andere Gram'scher Matrizen; dadurch Erhaltung z.B. von Passivität.
- Komplexität bisher  $\mathcal{O}(n^3)$ .

Neue algorithmische Ideen der numerischen linearen Algebra  $\rightsquigarrow$ :

- Effiziente parallele Algorithmen  $\rightsquigarrow$  Software PLICMR mit WebComputing Interface.
- Sparse Implementierung mit Hilfe sparser Lyapunov-Löser **LyaPack, SpaRed** mit **Komplexität  $\mathcal{O}(nr^2)$** .
- Für spezielle Probleme Implementierung mit Hilfe hierarchischen Matrizen, Komplexität  $\mathcal{O}(n \log^2(n)r^2)$ .



# Balanciertes Abschneiden

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Ziele  
Methoden

Beispiele

Ausblick

Referenzen

## Eigenschaften:

- Reduziertes Modell ist stabil und balanciert.
- Adaptive Wahl von  $r$  durch berechenbare Fehlerabschätzung:

$$\|y - \hat{y}\|_2 \leq \left( 2 \sum_{k=r+1}^n \sigma_k \right) \|u\|_2.$$

- Verschiedene Varianten durch Wahl andere Gram'scher Matrizen; dadurch Erhaltung z.B. von Passivität.
- Komplexität bisher  $\mathcal{O}(n^3)$ .

Neue algorithmische Ideen der numerischen linearen Algebra  $\rightsquigarrow$ :

- Effiziente parallele Algorithmen  $\rightsquigarrow$  Software PLICMR mit WebComputing Interface.
- Sparse Implementierung mit Hilfe sparser Lyapunov-Löser LyaPack, SpaRed mit Komplexität  $\mathcal{O}(nr^2)$ .
- Für spezielle Probleme Implementierung mit Hilfe hierarchischen Matrizen, Komplexität  $\mathcal{O}(n \log^2(n)r^2)$ .



# Beispiele

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

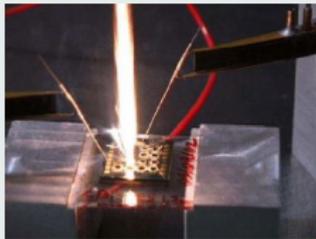
Induktionsspule

Ausblick

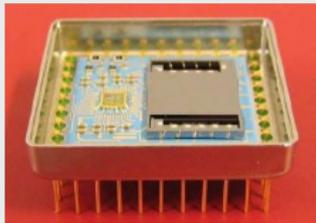
Referenzen

## MEMS

### 1. Microthruster:



### 2. Butterfly gyro:



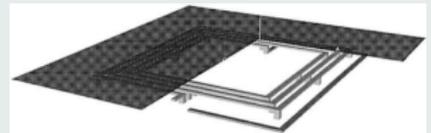
## Mikroelektronik

### 3. Interconnect:

Modell zur Modellierung von  
parasitären Effekten durch  
Leiterbahnen.

Quelle: Infineon AG, München

### 4. Induktionsspule:



passives Bauteil für Filter  
u.ä.

Quelle: MIT/Jing-Rebecca Li



# Microthruster

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

Induktionsspule

Ausblick

Referenzen

- axial-symmetrisches 2D Modell
- FEM Diskretisierung mit linearen Elementen  $\rightsquigarrow n = 4,257, m = 1, p = 7$ .
- Reduziertes Modell berechnet mit SPARED und Arnoldi( $A, B$ ).
- Ordnung des reduzierten Modells:  $r = 30$  ( $r = 120$  für Arnoldi).



# Microthruster

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

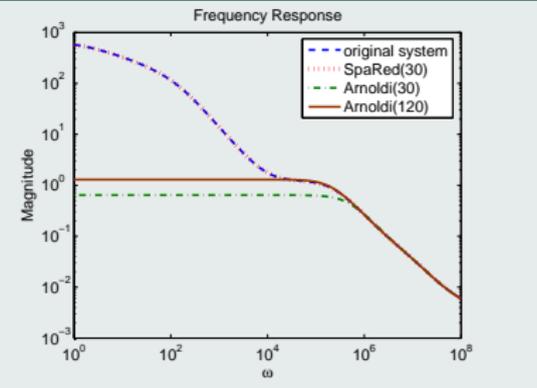
Induktionsspule

Ausblick

Referenzen

- axial-symmetrisches 2D Modell
- FEM Diskretisierung mit linearen Elementen  $\rightsquigarrow n = 4,257, m = 1, p = 7$ .
- Reduziertes Modell berechnet mit SPARED und  $\text{Arnoldi}(A, B)$ .
- Ordnung des reduzierten Modells:  $r = 30$  ( $r = 120$  für Arnoldi).

## Frequenzgangsanalyse





# Microthruster

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

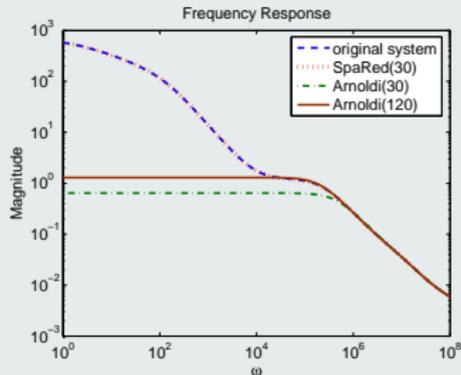
Induktionsspule

Ausblick

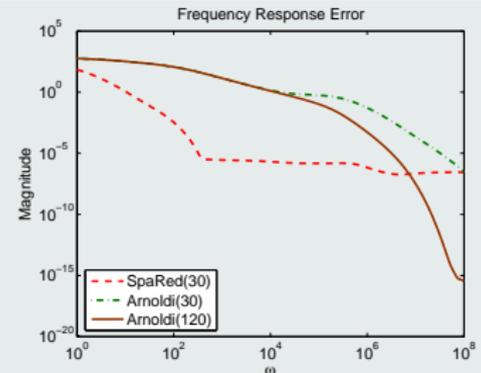
Referenzen

- axial-symmetrisches 2D Modell
- FEM Diskretisierung mit linearen Elementen  $\rightsquigarrow n = 4,257, m = 1, p = 7$ .
- Reduziertes Modell berechnet mit SPARED und Arnoldi( $A, B$ ).
- Ordnung des reduzierten Modells:  $r = 30$  ( $r = 120$  für Arnoldi).

## Frequenzgangsanalyse



## Absoluter Fehler





# Microthruster

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

Induktionsspule

Ausblick

Referenzen

- axial-symmetrisches 2D Modell
- FEM Diskretisierung mit quadratischen Elementen  $\rightsquigarrow n = 11,445$ ,  
 $m = 1$ ,  $p = 7$ .
- Reduziertes Modell berechnet mit LyaPack [Penzl '99].
- Ordnung des reduzierten Modells:  $r = 28$ .



# Microthruster

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

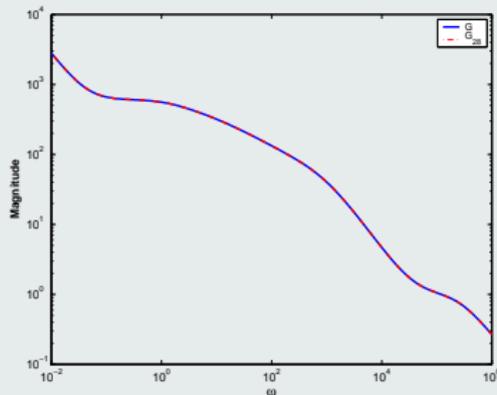
Induktionsspule

Ausblick

Referenzen

- axial-symmetrisches 2D Modell
- FEM Diskretisierung mit quadratischen Elementen  $\rightsquigarrow n = 11,445$ ,  
 $m = 1$ ,  $p = 7$ .
- Reduziertes Modell berechnet mit LyaPack [Penzl '99].
- Ordnung des reduzierten Modells:  $r = 28$ .

## Frequenzgangsanalyse





# Microthruster

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

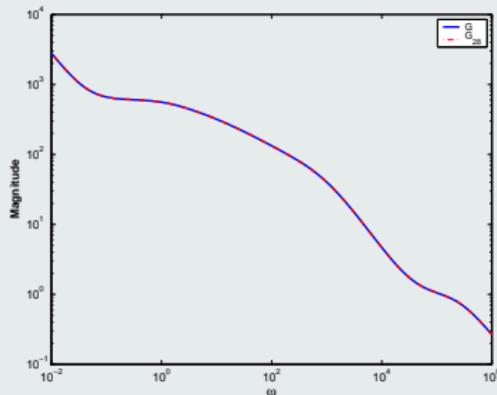
Induktionsspule

Ausblick

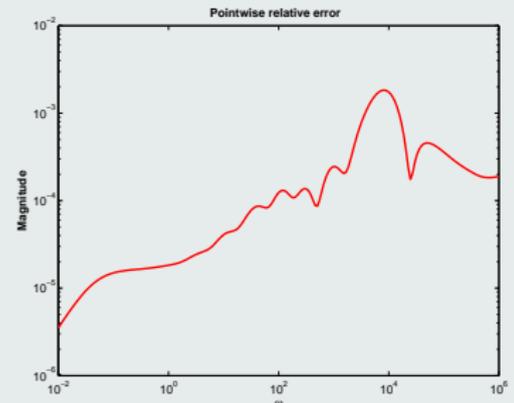
Referenzen

- axial-symmetrisches 2D Modell
- FEM Diskretisierung mit quadratischen Elementen  $\rightsquigarrow n = 11,445$ ,  $m = 1$ ,  $p = 7$ .
- Reduziertes Modell berechnet mit LyaPack [Penzl '99].
- Ordnung des reduzierten Modells:  $r = 28$ .

## Frequenzgangsanalyse



## Relativer Fehler





# Butterfly gyro

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

**Butterfly gyro**

Interconnect

Induktionsspule

Ausblick

Referenzen

- FEM Diskretisierung des strukturdynamischen Modells mit quadratischen Tetraeder-Elementen (ANSYS)  
 $\rightsquigarrow n = 34,722, m = 1, p = 12.$
- Reduziertes Modell berechnet mit SPARED,  $r = 30.$



# Butterfly gyro

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

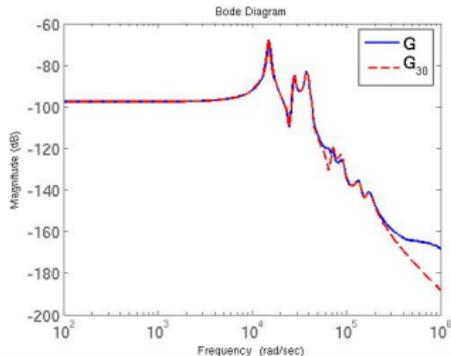
Induktionsspule

Ausblick

Referenzen

- FEM Diskretisierung des strukturdynamischen Modells mit quadratischen Tetraeder-Elementen (ANSYS)  
↪  $n = 34,722$ ,  $m = 1$ ,  $p = 12$ .
- Reduziertes Modell berechnet mit SPARED,  $r = 30$ .

## Frequenzgangsanalyse





# Butterfly gyro

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

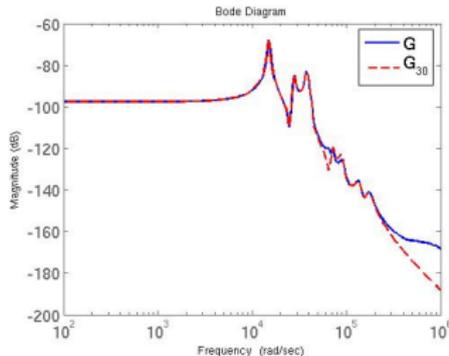
Induktionsspule

Ausblick

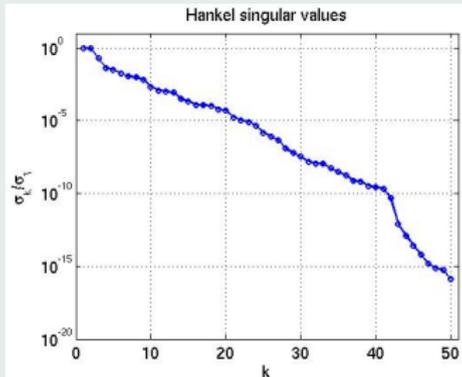
Referenzen

- FEM Diskretisierung des strukturdynamischen Modells mit quadratischen Tetraeder-Elementen (ANSYS)  
 $\rightsquigarrow n = 34,722, m = 1, p = 12.$
- Reduziertes Modell berechnet mit SPARED,  $r = 30.$

## Frequenzgangsanalyse



## Hankel-Singulärwerte





# Interconnect

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

**Interconnect**

Induktionsspule

Ausblick

Referenzen

- RLC Netzwerk, Kennlinie hat steile Flanke bei 100 Hz.
- $n = 199$ ,  $m = p = 2$ , reduziertes Modell mit PLiCMR:  $r = 20$ .



# Interconnect

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

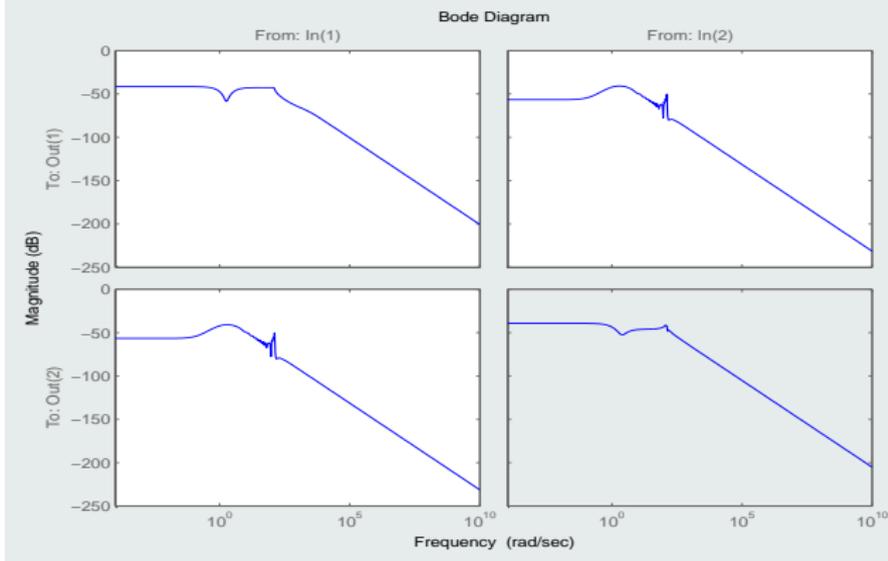
Induktionsspule

Ausblick

Referenzen

- RLC Netzwerk, Kennlinie hat steile Flanke bei 100 Hz.
- $n = 199$ ,  $m = p = 2$ , reduziertes Modell mit PLICMR:  $r = 20$ .

## Genauigkeit des reduzierten Modells





# Induktionsspule

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

**Induktionsspule**

Ausblick

Referenzen

- $n = 500$ ,  $m = 1$ ,  $p = 1$ , numerischen Rang der Gram'schen ist 34.
- Passives Bauteil, daher verwende Balancierung für positiv-reale Systeme.
- Reduziertes Modell berechnet mit PLICMR,  $r = 11$ .



# Induktionsspule

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

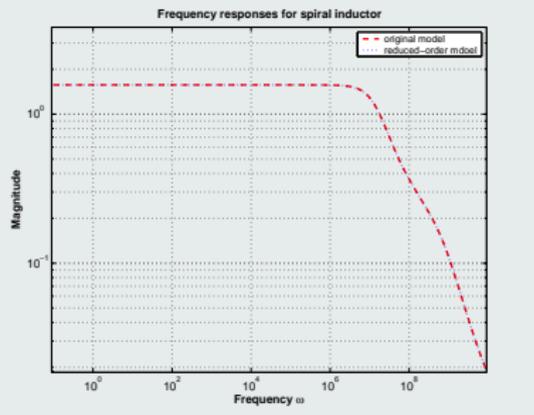
Induktionsspule

Ausblick

Referenzen

- $n = 500$ ,  $m = 1$ ,  $p = 1$ , numerischen Rang der Gram'schen ist 34.
- Passives Bauteil, daher verwende Balancierung für positiv-reale Systeme.
- Reduziertes Modell berechnet mit PLICMR,  $r = 11$ .

## Frequenzgangsanalyse





# Induktionsspule

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Microthruster

Butterfly gyro

Interconnect

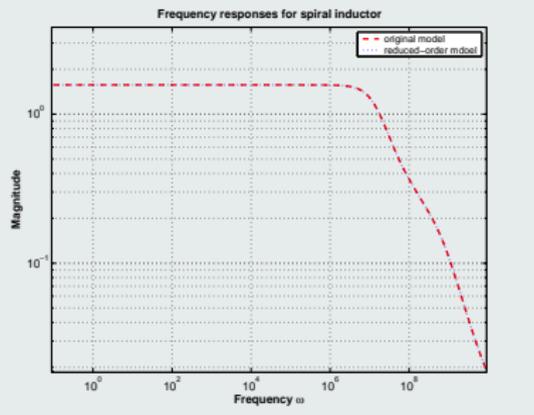
Induktionsspule

Ausblick

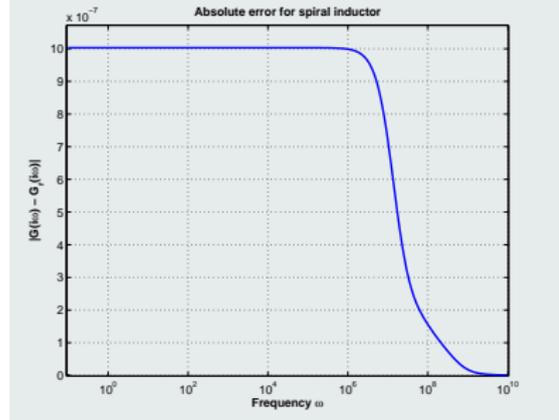
Referenzen

- $n = 500$ ,  $m = 1$ ,  $p = 1$ , numerischen Rang der Gram'schen ist 34.
- Passives Bauteil, daher verwende Balancierung für positiv-reale Systeme.
- Reduziertes Modell berechnet mit PLICMR,  $r = 11$ .

## Frequenzgangsanalyse



## Absoluter Fehler





## Parametrisierte Modelle

### ■ Betrachte

$$\dot{x} = A(p)x + B(p)u, \quad y = C(p)x + D(p)u,$$

wobei  $p \in \mathbb{R}^s$  freie Parameter sind, die im reduzierten Modell erhalten bleiben sollen.

### ■ Beispiele:

- Nicht spezifizierte Randbedingungen, z.B. bei thermischen Modellen von ICs (integrierten Schaltkreisen),
- Anemometer (Strömungssensor),
- Elektrochemisches Rastermikroskop.

### ■ Oft: $B, C, D$ parameterunabhängig,

$$A(p) = A_0 + p_1 A_1 + \dots + p_s A_s.$$

⇒ Lineare Modellreduktionsmethoden anwendbar.



## Parametrisierte Modelle

### ■ Betrachte

$$\dot{x} = A(p)x + B(p)u, \quad y = C(p)x + D(p)u,$$

wobei  $p \in \mathbb{R}^s$  freie Parameter sind, die im reduzierten Modell erhalten bleiben sollen.

### ■ Beispiele:

- Nicht spezifizierte Randbedingungen, z.B. bei thermischen Modellen von ICs (integrierten Schaltkreisen),
- Anemometer (Strömungssensor),
- Elektrochemisches Rastermikroskop.

### ■ Oft: $B, C, D$ parameterunabhängig,

$$A(p) = A_0 + p_1 A_1 + \dots + p_s A_s.$$

⇒ Lineare Modellreduktionsmethoden anwendbar.



## Parametrisierte Modelle

### ■ Betrachte

$$\dot{x} = A(p)x + B(p)u, \quad y = C(p)x + D(p)u,$$

wobei  $p \in \mathbb{R}^s$  freie Parameter sind, die im reduzierten Modell erhalten bleiben sollen.

### ■ Beispiele:

- Nicht spezifizierte Randbedingungen, z.B. bei thermischen Modellen von ICs (integrierten Schaltkreisen),
- Anemometer (Strömungssensor),
- Elektrochemisches Rastermikroskop.

### ■ Oft: $B, C, D$ parameterunabhängig,

$$A(p) = A_0 + p_1 A_1 + \dots + p_s A_s.$$

⇒ Lineare Modellreduktionsmethoden anwendbar.



## Nichtlineare Systeme

- Modale Projektion

$$x \approx V\hat{x}, \quad \dot{\hat{x}} = W^T f(V\hat{x}, u)$$

ist i.a. noch keine Modellreduktion!

- POD (“proper orthogonal decomposition”) verwendet Simulationen mit Originalsystem sowie statistische Methoden (Hauptkomponentenanalyse).
- Nichtlinearitäten mit spezieller Struktur:

–



## Nichtlineare Systeme

- Modale Projektion

$$x \approx V\hat{x}, \quad \dot{\hat{x}} = W^T f(V\hat{x}, u)$$

ist i.a. noch keine Modellreduktion!

- **POD** (“proper orthogonal decomposition”) verwendet Simulationen mit Originalsystem sowie statistische Methoden (Hauptkomponentenanalyse).
- Nichtlinearitäten mit spezieller Struktur:

–



## Nichtlineare Systeme

- Modale Projektion

$$x \approx V\hat{x}, \quad \dot{\hat{x}} = W^T f(V\hat{x}, u)$$

ist i.a. noch keine Modellreduktion!

- POD (“proper orthogonal decomposition”) verwendet Simulationen mit Originalsystem sowie statistische Methoden (Hauptkomponentenanalyse).
- Nichtlinearitäten mit spezieller Struktur:

- **Kontroll-affine Systeme:**  $f(t, x, u) = g(x) + Bu$   
     $\rightsquigarrow$  Carlemann-Bilinearisierung,

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{N}zu + \tilde{B}u$$

$\rightsquigarrow$  Balancierungstechniken?



## Nichtlineare Systeme

- Modale Projektion

$$x \approx V\hat{x}, \quad \dot{\hat{x}} = W^T f(V\hat{x}, u)$$

ist i.a. noch keine Modellreduktion!

- POD (“proper orthogonal decomposition”) verwendet Simulationen mit Originalsystem sowie statistische Methoden (Hauptkomponentenanalyse).
- Nichtlinearitäten mit spezieller Struktur:
  - Linearisierung entlang Lösungstrajektorie  
↪ **zeitvariante lineare Systeme** ...  
Balancierungstechniken?



## Nichtlineare Systeme

- Modale Projektion

$$x \approx V\hat{x}, \quad \dot{\hat{x}} = W^T f(V\hat{x}, u)$$

ist i.a. noch keine Modellreduktion!

- POD (“proper orthogonal decomposition”) verwendet Simulationen mit Originalsystem sowie statistische Methoden (Hauptkomponentenanalyse).
- Nichtlinearitäten mit spezieller Struktur:

- “Überwiegend” lineare Systeme:  $\dot{x} = Ax + Nh(z) + Bu$   
mit  $Hx =: z \in \mathbb{R}^\ell$ ,  $\ell \ll n \rightsquigarrow$  **formal lineares System**:

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ h(z) \end{bmatrix}$$



# Referenzen

Modellreduktion  
in der Mikro-  
systemtechnik

Peter Benner

Einleitung

Modellreduktion

Beispiele

Ausblick

Referenzen

- 1** G. Obinata and B.D.O. Anderson.  
*Model Reduction for Control System Design*.  
Springer-Verlag, London, UK, 2001.
- 2** Z. Bai.  
Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems.  
*APPL. NUMER. MATH.*, 43(1-2):9-44, 2002.
- 3** R. Freund.  
Model reduction methods based on Krylov subspaces.  
*ACTA NUMERICA*, 12:267-319, 2003.
- 4** P. Benner, E.S. Quintana-Ortí, and G. Quintana-Ortí.  
State-space truncation methods for parallel model reduction of large-scale systems.  
*PARALLEL COMPUT.*, 29:1701-1722, 2003.
- 5** P. Benner, V. Mehrmann, and D. Sorensen, editors.  
*Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, LECTURE NOTES IN COMPUTATIONAL SCIENCE AND ENGINEERING,  
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, Germany, 2005.
- 6** A.C. Antoulas.  
*Lectures on the Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*.  
SIAM Publications, Philadelphia, PA, 2005.
- 7** P. Benner, R. Freund, D. Sorensen, and A. Varga (editors).  
Special issue on *Order Reduction of Large-Scale Systems*.  
*LINEAR ALGEBRA APPL.*, 2005.
- 8** J. Lienemann, E.B. Rudnyi, and J.G. Korvink.  
MST MEMS model order reduction: Requirements and Benchmarks.  
*LINEAR ALGEBRA APPL.*, 2005.