Kolloquium "Technische Kybernetik"
Stuttgart, 28. April 2011

Regeln, Steuern, Optimieren: Kompakte Modelle für komplexe Systeme

Peter Benner

Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods in Systems and Control Theory

Inhalt

Optimale Steuerung

Optimale Steuerung

dient der Optimierung dynamischer Prozesse,

die durch gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen beschrieben werden,

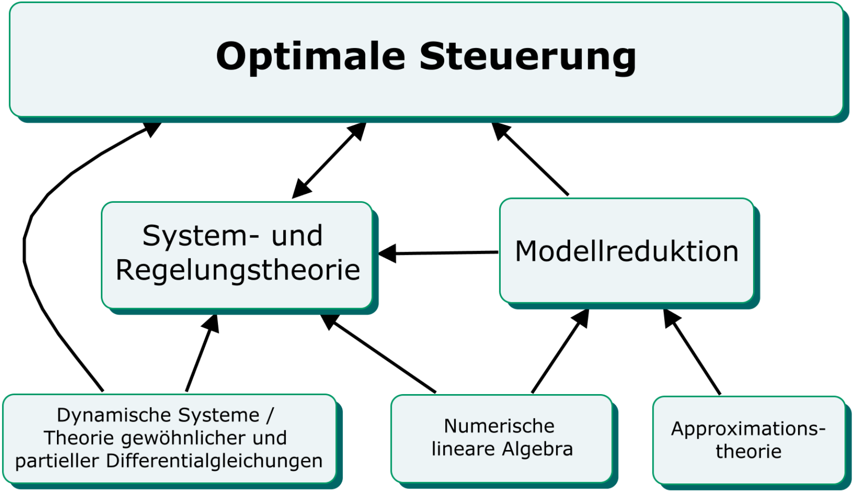
wobei ein Kostenfunktional minimiert wird

(z.B. Energiekosten, Abweichung von vorgegebener Route/Bahnkurve≡Trajektorie),

so dass ein vorgegebenes Ziel
in einer bestimmten oder minimaler Zeit
erreicht wird,

unter Einhaltung von Grenzwerten für die Zustandsgrößen bzw.
von Beschränkungen der Steuergrößen.

Optimale Steuerung



Optimale Steuerung —

Ein großer Schritt für die Mathematik. . . (historische Aufarbeitung: [Pesch/Plail 2009])

Das Pontryaginsche Minimumprinzip

[Boltyanskii/Gamkrelidze/Pontryagin 1960]

Es sei $(x^*, u^*) : [0, T] \to \mathbb{R}^n \times U$ eine optimale Lösung des Optimalsteuerungsproblems

$$\text{Minimiere } F(x, u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))\, dt$$

$$\begin{aligned} \text{unter } \dot{x} &= f(t, x, u) \quad \text{für } t \in [0, T], \\ x(0) &= x_0, \qquad \psi(x(T)) = 0, \\ u(t) &\in U, \quad U \subset \mathbb{R}^m \text{ nichtleer, konvex, abgeschlossen}, \end{aligned}$$

wobei die Matrix $\psi_x(x^*(T))$ vollen Rang habe. Weiterhin sei die zugehörige **Hamilton-Funktion**

$$H(t, x, \lambda, u) := \lambda_0 f_0(t, x, u) + \langle \lambda, f(t, x, u)\rangle = \lambda_0 f_0(t, x, u) + \lambda^\top f(t, x, u).$$

Dann existieren $\lambda_0 \geq 0$ und eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $\lambda : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ und ein Vektor $\nu \in \mathbb{R}^r$ mit $(\lambda_0, \lambda(t), \nu) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$, sodass die folgenden Aussagen gelten:

(*i*) An allen Stetigkeitsstellen $t \in [0, T]$ von $u^*(\cdot)$ gilt die **Minimumbedingung**

$$H(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{u \in U} H(t, x^*(t), \lambda(t), u).$$

(*ii*) An allen Stetigkeitsstellen $t \in [0, T]$ von $u^*(\cdot)$ gilt die **adjungierte Differentialgleichung**

$$\dot{\lambda}(t)^\top = -H_x(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)).$$

(*iii*) Im Endzeitpunkt T gilt die **Transversalitätsbedingung**

$$\lambda(T)^\top = \lambda_0 g_x(x^*(T)) + \nu^\top \psi_x(x^*(T)).$$

(*iv*) Im Falle freier Endzeit gilt für die optimale Endzeit T^*

$$H(T^*, x^*(T^*), \lambda(T^*), u^*(T^*)) = 0.$$

(*v*) Für autonome Systeme (also $H(t, x, \lambda, u) \equiv H(x, \lambda, u)$) gilt außerdem

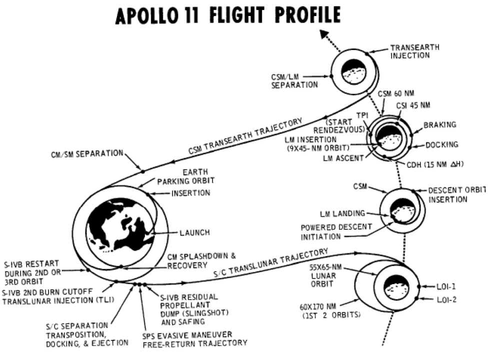
$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \text{const in } [0, T].$$

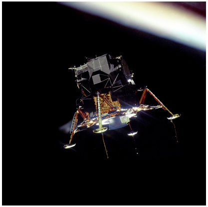
Optimale Steuerung

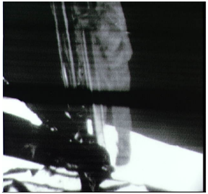
. . . ein großer Sprung für die Menschheit!

Neil Alden Armstrong, 21. Juli 1968:

"That's one small step for man . . .
one . . . giant leap for mankind!"







Bildnachweise:

Mitte Apollo 11 Mission Operations report, http://history.nasa.gov/alsj/a11/A11_MissionOpReport.pdf
Li./re., oben http://de.wikipedia.org/wiki/Apollo_11,
Li./re., unten NASA photo IDs AS11-44-6552, S69-42583.

Regelung

Optimale Steuerung in der Praxis

Wichtige Beobachtung

Optimierte Lösungstrajektorie $x_*(t; u_*)$ und vorberechnete Steuerung $u_*(t)$ können in der Realität nicht eingehalten werden wegen

- Modellierungsfehlern bzw. nicht modellierter Dynamik,
- Modellunsicherheiten,
- äußeren Störungen,
- Messfehlern und -ungenauigkeiten.

Konsequenz: Benötige Regelung ("Feedback")

$$u(t) = u_*(t) + U(t, x(t) - x_*(t)).$$

Regelung

Optimale Steuerung in der Praxis

Wichtige Beobachtung

Optimierte Lösungstrajektorie $x_*(t; u_*)$ und vorberechnete Steuerung $u_*(t)$ können in der Realität nicht eingehalten werden wegen

- Modellierungsfehlern bzw. nicht modellierter Dynamik,
- Modellunsicherheiten,
- äußeren Störungen,
- Messfehlern und -ungenauigkeiten.

Konsequenz: Benötige Regelung ("Feedback")

$$u(t) = u_*(t) + U(t, x(t) - x_*(t)).$$

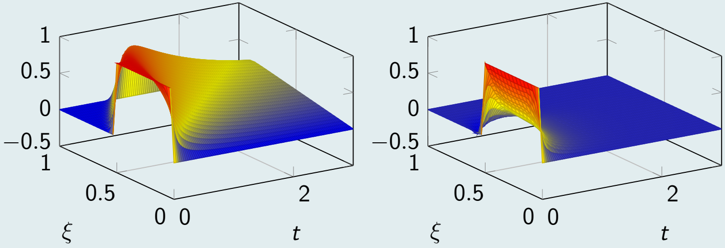
Regelung

Optimale Steuerung in der Praxis

Beispiel: Optimale Steuerung eines einfachen Strömungsmodells

Burgersgleichung:

$$\begin{aligned}
\partial_t x(t,\xi) &= \nu\,\partial_{\xi\xi} x(t,\xi) - x(t,\xi)\,\partial_\xi x(t,\xi) + B(\xi)u(t) + F(\xi)v(t),\\
x(t,0) &= x(t,1) = 0, \quad x(0,\xi) = x_0(\xi) + \eta(\xi), \quad \xi \in (0,1),\\
y(t,\xi) &= C\,x(t,\xi) + w(t,\xi).
\end{aligned}$$



Gefördert durch DFG Projekt BE3715/1-1 *Numerical Solution of Optimal Control Problems with Instationary Diffusion-Convection and Diffusion-Reaction Equations*.

Regelung

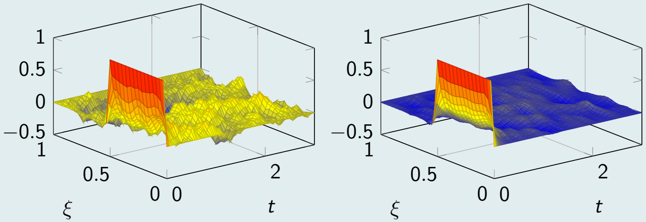
Optimale Steuerung in der Praxis

Beispiel: Optimale Steuerung eines einfachen Strömungsmodells

Burgersgleichung:

$$\begin{aligned}
\partial_t x(t,\xi) &= \nu\,\partial_{\xi\xi} x(t,\xi) - x(t,\xi)\,\partial_\xi x(t,\xi) + B(\xi)u(t) + F(\xi)v(t), \\
x(t,0) &= x(t,1) = 0, \quad x(0,\xi) = x_0(\xi) + \eta(\xi), \quad \xi \in (0,1), \\
y(t,\xi) &= C\,x(t,\xi) + w(t,\xi).
\end{aligned}$$

Nichtlineare Regelung (hier: MPC-LQG), nur Störungen am Eingang:



Reduktion des Folgefehlers $\int_0^T \|x(t) - x_*(t)\|_2^2 \, dt$ um Faktor > 10.

[Benner/Görner, PAMM 2006]; [Benner/Görner/Saak, Springer LNCSE 2006].

Gefördert durch DFG Projekt BE3715/1-1 *Numerical Solution of Optimal Control Problems with Instationary Diffusion-Convection and Diffusion-Reaction Equations*.

Regelung

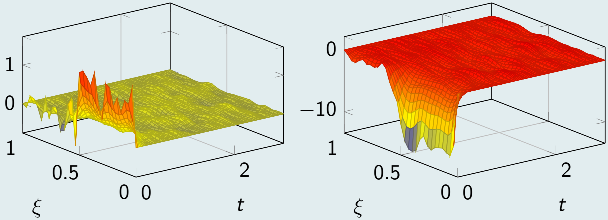
Optimale Steuerung in der Praxis

Beispiel: Optimale Steuerung eines einfachen Strömungsmodells

Burgersgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t x(t,\xi) &= \nu\, \partial_{\xi\xi} x(t,\xi) - x(t,\xi)\, \partial_\xi x(t,\xi) + B(\xi)u(t) + F(\xi)v(t), \\ x(t,0) &= x(t,1) = 0, \quad x(0,\xi) = x_0(\xi) + \eta(\xi), \quad \xi \in (0,1), \\ y(t,\xi) &= C\, x(t,\xi) + w(t,\xi). \end{aligned}$$

Nichtlineare Regelung (hier: MPC-LQG), Zustand und Steuerung:



Reduktion des Folgefehlers $\int_0^T \|x(t) - x_*(t)\|_2^2 \, dt$ um Faktor > 10.

[Benner/Görner, PAMM 2006]; [Benner/Görner/Saak, Springer LNCSE 2006].

Gefördert durch DFG Projekt BE3715/1-1 *Numerical Solution of Optimal Control Problems with Instationary Diffusion-Convection and Diffusion-Reaction Equations*.

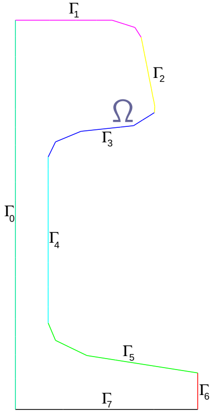
Beispiele aus Projekten

Optimale Abkühlung von Stahlprofilen

- Mathematisches Modell: Randsteuerung für nichtlineare 2D Wärmeleitung,

$$
\begin{aligned}
c(\Theta)\rho(\Theta)\partial_t\Theta &= \nabla.(\lambda(\Theta)\nabla\Theta) \text{ in } [0,t_f]\times\Omega,\\
\lambda(\Theta)\partial_\nu\Theta &= \alpha(\Theta-\Theta_{ext})+\beta(\Theta^4-\Theta_{ext}^4)\\
&\qquad \text{auf } \Gamma_k,\ k=1,\ldots,7,\\
\partial_n\Theta &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_8.
\end{aligned}
$$

- λ, c, ρ: linear-affine Funktionen, gültig für Austenit-Phase; Linearisierung durch Mittelwertbildung.
- FE-Diskretisierung $\rightsquigarrow$ Modellhierarchie: $n = 1357, 5177, 20209, 79841$.



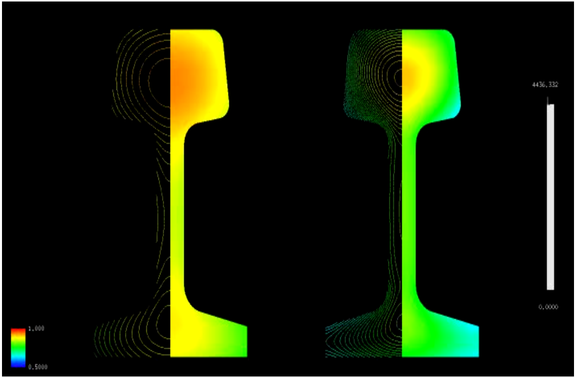
Ziel:
Schnelle Kühlung (höhere Produktionsrate, Vermeidung der Bildung von Perlit) mit beschränkten Temperaturgradienten.
Ansatz: Adaptive LQR Regelung.

Gefördert durch DFG Projekt BE3715/1-1 *Numerical Solution of Optimal Control Problems with Instationary Diffusion-Convection and Diffusion-Reaction Equations*.

Beispiele aus Projekten

Optimale Abkühlung von Stahlprofilen

ungesteuert gesteuert



[Benner/Saak, PAMM 2004/2007]

Gefördert durch DFG Projekt BE3715/1-1 *Numerical Solution of Optimal Control Problems with Instationary Diffusion-Convection and Diffusion-Reaction Equations*.

Beispiele aus Projekten

Modellprädiktive Regelung eines 3D Reaktions-Diffusions-Prozesses

Modell eines chemischen oder biologischen Reaktions-Diffusions-Prozesses, hier 3 Substanzen oder Spezies $c_i,\ i = 1, 2, 3$ (nur Vorwärtsreaktion: $S_1 + S_2 \rightarrow S_3$; PDE für S_3 kann unabhängig gelöst werden): [Griesse/Volkwein '05]

Gekoppeltes System von Reaktions-Diffusions-Gleichungen:

$$\partial_t c_i(\xi, t) = D_i \Delta c_i(\xi, t) - k c_1(\xi, t) c_2(\xi, t), \quad i = 1, 2 \text{ on } \Omega \times (0, T).$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} c_1(\xi, t) &= 0 \text{ auf } \delta\Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial}{\partial n} c_2(\xi, t) &= \begin{cases} 0 & \text{auf} \quad (\delta\Omega \setminus \Omega_u) \times (0, T), \\ \alpha(\xi, t) u(t) & \text{auf} \quad \Omega_u \times (0, T). \end{cases} \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen: $c_1(\xi, 0) = c_{1,0}(\xi), \quad c_2(\xi, 0) = c_{2,0}(\xi).$

Ziel: Vollständige Reaktion von S_1 in gegebener Zeit bei beschränkter S_2-Zufuhr.

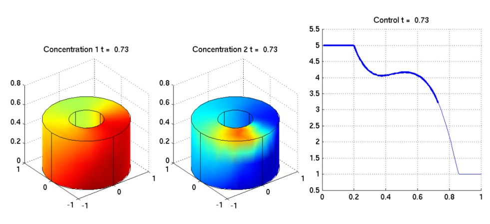
Gefördert durch DFG Projekt BE3715/1-1 *Numerical Solution of Optimal Control Problems with Instationary Diffusion-Convection and Diffusion-Reaction Equations*.

Beispiele aus Projekten

Modellprädiktive Regelung eines 3D Reaktions-Diffusions-Prozesses

- Vorberechnete optimierte Steuerung (primal-duale Aktive-Mengen-Methode [Griesse/Volkwein '05]); Störung des Modells und der Anfangsbedingungen $\rightsquigarrow$ optimierte Trajektorie (Produktionsrate) wird nicht erreicht.
- Nichtlineare Regelung (MPC-LQG) [Ito/Kunisch '03/06, Benner/Hein '09/10].

Ergebnis



[Benner/Hein, PAMM 2009]

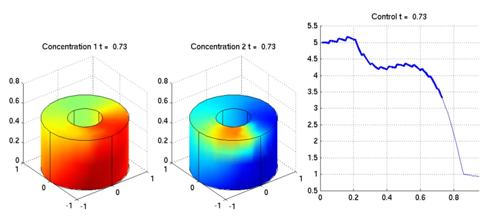
Gefördert durch DFG Projekt BE3715/1-1 *Numerical Solution of Optimal Control Problems with Instationary Diffusion-Convection and Diffusion-Reaction Equations*.

Beispiele aus Projekten

Modellprädiktive Regelung eines 3D Reaktions-Diffusions-Prozesses

- Vorberechnete optimierte Steuerung (primal-duale Aktive-Mengen-Methode [Griesse/Volkwein '05]); Störung des Modells und der Anfangsbedingungen ⇝ optimierte Trajektorie (Produktionsrate) wird nicht erreicht.
- Nichtlineare Regelung (MPC-LQG) [Ito/Kunisch '03/06, Benner/Hein '09/10].

Ergebnis



[Benner/Hein, PAMM 2009]

Gefördert durch DFG Projekt BE3715/1-1 *Numerical Solution of Optimal Control Problems with Instationary Diffusion-Convection and Diffusion-Reaction Equations*.

Beispiele aus Projekten

Stabilisierung von (Mehrfeld-)strömungen: Kármánsche Wirbelstraße

Ziel:

Stabilisierung einer Strömung (mit Geschwindigkeitsfeld v und Druck χ), gegeben durch Navier-Stokes Gleichungen

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v - \frac{1}{Re}\Delta v + \nabla \chi = f \tag{1a}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{1b}$$

definiert auf $Q_\infty := \Omega \times (0,\infty)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d = 2,3$ mit glattem Rand $\Gamma := \partial\Omega$ und Rand-/Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} v &= g \quad \text{on } \Sigma_\infty := \Gamma \times (0,\infty), \\ v(0) &= w + z(0) \quad (w = \text{ geg. Strömungsprofil}). \end{aligned}$$

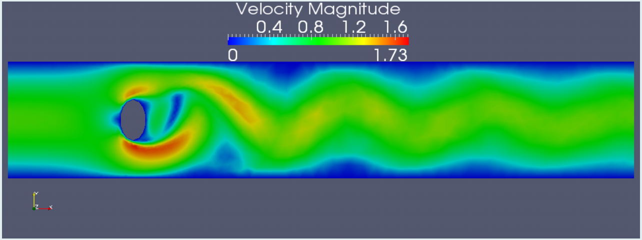
Gefördert durch DFG SPP1253 Projekt BE2174/8-1 *Optimal Control-Based Feedback Stabilization of Multi-Field Flow Problems*.

Beispiele aus Projekten

Stabilisierung von (Mehrfeld-)strömungen: Kármánsche Wirbelstraße

Kármánsche Wirbelstraße

- $Re = 300$.
- Unterdrücke Wirbelbildung durch Einblasen am oberen Zylinderrand.
- Proportionale Zustandsrückführung.



[BÄNSCH/BENNER '10], Rechnungen, Filme: Heiko Weichelt.

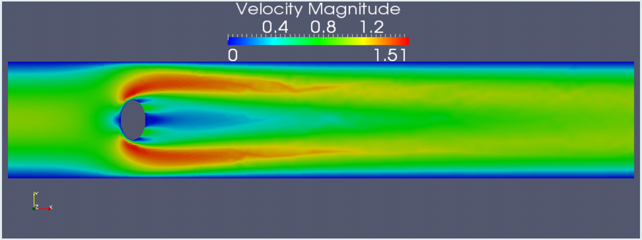
Gefördert durch DFG SPP1253 Projekt BE2174/8-1 *Optimal Control-Based Feedback Stabilization of Multi-Field Flow Problems*.

Beispiele aus Projekten

Stabilisierung von (Mehrfeld-)strömungen: Kármánsche Wirbelstraße

Kármánsche Wirbelstraße

- $Re = 300$.
- Unterdrücke Wirbelbildung durch Einblasen am oberen Zylinderrand.
- Proportionale Zustandsrückführung.



[Bänsch/Benner '10], Rechnungen, Filme: Heiko Weichelt.

Gefördert durch DFG SPP1253 Projekt BE2174/8-1 *Optimal Control-Based Feedback Stabilization of Multi-Field Flow Problems*.

Beispiele aus Projekten

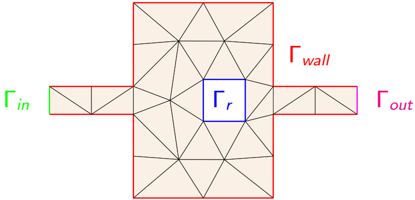
Stabilisierung von Mehrfeldströmungen: Passiver Transport reaktiver Spezies

Ziel: Reduziere Konzentration einfließender Substanz auf geg. Niveau durch instantane Reaktion.

Modellgleichungen:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{v} - \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{v} + \mathbf{v}.\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{p} &= \mathbf{f}\\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0\\ \partial_t \mathbf{c} + \mathbf{v}.\nabla \mathbf{c} - \frac{1}{Re \cdot Sc}\Delta \mathbf{c} &= 0\end{aligned}$$

Gebiet:



Gefördert durch DFG SPP1253 Projekt *Optimal Control-Based Feedback Stabilization of Multi-Field Flow Problems*.

Beispiele aus Projekten

Stabilisierung von Mehrfeldströmungen: Passiver Transport reaktiver Spezies

Ziel: Reduziere Konzentration einfließender Substanz auf geg. Niveau durch instantane Reaktion.

Modellgleichungen:

$$\partial_t \mathbf{v} - \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{v} + \mathbf{v}.\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{p} = \mathbf{f}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{c} + \mathbf{v}.\nabla \mathbf{c} - \frac{1}{Re \cdot Sc}\Delta \mathbf{c} = 0$$

Randbedingungen:

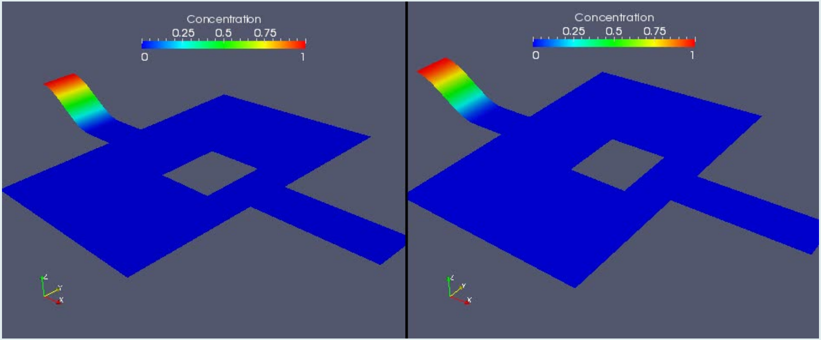
$$\begin{array}{lll} \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 & \mathbf{c} = \mathbf{c}_0 = const & \text{on } \Gamma_{in} \\ \mathbf{v} = 0 & \partial_\nu \mathbf{c} = 0 & \text{on } \Gamma_{wall} \\ \mathbf{v} = 0 & \mathbf{c} = 0 & \text{on } \Gamma_r, \end{array}$$

Gefördert durch DFG SPP1253 Projekt *Optimal Control-Based Feedback Stabilization of Multi-Field Flow Problems*.

Beispiele aus Projekten

Stabilisierung von Mehrfeldströmungen: Passiver Transport reaktiver Spezies

Folgeregelung



keine Regelung — stückweise konstantes Feedback

[Bänsch/Benner/Saak/Schneider/Weichelt '0?]

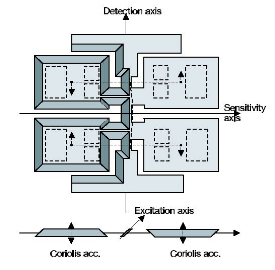
Gefördert durch DFG SPP1253 Projekt *Optimal Control-Based Feedback Stabilization of Multi-Field Flow Problems*.

Modellreduktion als Schlüsseltechnologie

Beispiel: Designoptimierung für Mikrosysteme

Mikrogyroskop (butterfly gyro)

- Anwendung: Inertialnavigation (Trägheitsnavigation)



- Anregung der Elektroden durch angelegte Spannung lässt Flügel vibrieren, durch Coriolis-Kraft erzeugte Rotation liefert Sensordaten.
- FE-Modell 2. Ordnung: $N = 17.361 \rightsquigarrow n = 34.722,\ m = 1,\ p = 12.$
- Sensor zur Positionsbestimmung aus Beschleunigung und Drehung.

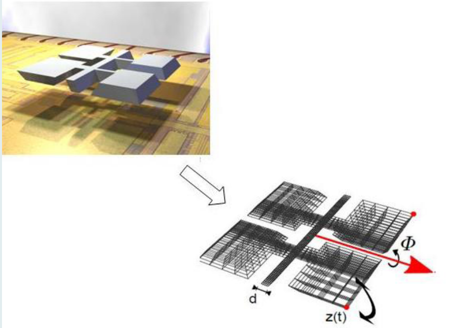
Quelle: The Oberwolfach Benchmark Collection `http://www.imtek.de/simulation/benchmark`

Modellreduktion als Schlüsseltechnologie

Beispiel: Designoptimierung für Mikrosysteme

Mikrogyroskop (butterfly gyro)

Parametrisches FE Modell: $M(d)\ddot{x}(t) + D(\theta, \alpha, \beta)\dot{x}(t) + T(d)x(t) = Bu(t).$



[Feng/Benner/Korvink '10]

Gefördert durch DFG Projekt BE2174/7-1 *Automatic, Parameter-Preserving Model Reduction for Applications in Microsystems Technology* mit IMTEK, Freiburg.

Modellreduktion als Schlüsseltechnologie

Beispiel: Designoptimierung für Mikrosysteme

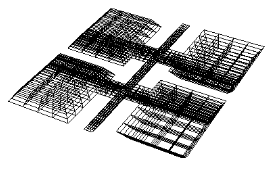
Mikrogyroskop (butterfly gyro)

Parametrisches FE Modell:

$$M(d)\ddot{x}(t) + D(\theta, \alpha, \beta)\dot{x}(t) + T(d)x(t) = Bu(t),$$

wobei

$$\begin{aligned} M(d) &= M_1 + dM_2, \\ D(\theta, \alpha, \beta) &= \theta(D_1 + dD_2) + \alpha M(d) + \beta T(d), \\ T(d) &= T_1 + \frac{1}{d}T_2 + dT_3, \end{aligned}$$



mit

- Breite des Trägers: d,
- Winkelgeschwindigkeit: θ,
- Rayleigh Dämpfungsparameter: α, β.

[Feng/Benner/Korvink '10]

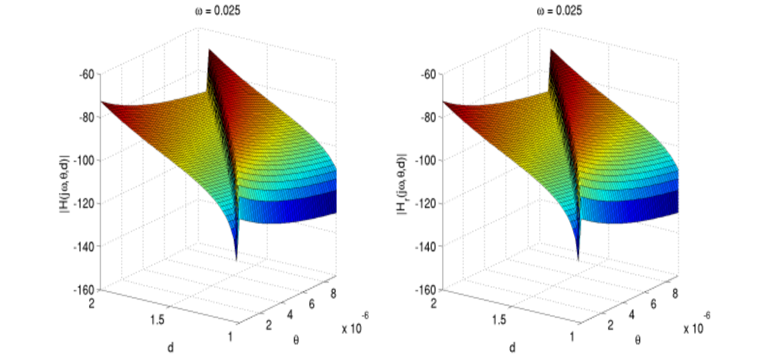
Gefördert durch DFG Projekt BE2174/7-1 *Automatic, Parameter-Preserving Model Reduction for Applications in Microsystems Technology* mit IMTEK, Freiburg.

Modellreduktion als Schlüsseltechnologie

Beispiel: Designoptimierung für Mikrosysteme

Mikrogyroskop (butterfly gyro)

Original. . . und Fälschung (reduziertes Modell).



Gefördert durch DFG Projekt BE2174/7-1 *Automatic, Parameter-Preserving Model Reduction for Applications in Microsystems Technology* mit IMTEK, Freiburg.

Modellreduktion als Schlüsseltechnologie

- Die Komplexität der Computersimulation und, insbesondere, des Steuerungs-/Reglerentwurfs sowie der Optimierung wächst rapide durch
  - Multiphysik Anwendungen (z.B. MEMS),
  - Parameterunsicherheiten,
  - Netzwerkstrukturen (z.B. Nanoelektronik, biochemische (metabolische) Netzwerke),
  - komplizierte 3D Geometrien (z.B. Werkzeugmaschinen).
- Fluch der Dimensionalität:
  Wachsende Leistungsfähigkeit der Computertechnik kann wachsende Modellkomplexität nicht kompensieren!
- Benötige reduzierte Modelle!

Modellreduktion als Schlüsseltechnologie

- Die Komplexität der Computersimulation und, insbesondere, des Steuerungs-/Reglerentwurfs sowie der Optimierung wächst rapide durch
  - Multiphysik Anwendungen (z.B. MEMS),
  - Parameterunsicherheiten,
  - Netzwerkstrukturen (z.B. Nanoelektronik, biochemische (metabolische) Netzwerke),
  - komplizierte 3D Geometrien (z.B. Werkzeugmaschinen).
- Fluch der Dimensionalität:
  Wachsende Leistungsfähigkeit der Computertechnik kann wachsende Modellkomplexität nicht kompensieren!
- Benötige reduzierte Modelle!

Modellreduktion als Schlüsseltechnologie

Beispiel: Algorithmische vs. Hardware Beschleunigung

- Parameterstudien müssen den Ingenieuren auf ihren Desktopcomputern auf täglicher Basis zur Verfügung stehen.
- Im Mikrogyroskop-Beispiel konnte die Parameterstudie

  von ca 3 Tagen auf 1 Stunde

  reduziert werden mithilfe einer neuen mathematischen Methode.

  $\Longrightarrow$ *Beschleunigungsfaktor* ≈ 72.

  Anderes Beispiel (Anemometer): Reduktion von über 11 Tagen auf ca. 90sec. $\rightsquigarrow$ 10.500fache Beschleunigung!
- Da Prozessortakt limitiert ist, benötigt eine entsprechende Beschleunigung durch *Hardware* Mehrkern-Technologie.
- Bei idealem Speed-up: Benötige $\approx$ 288 (21.000) Kerne!

Modellreduktion als Schlüsseltechnologie

- Die Komplexität der Computersimulation und, insbesondere, des Steuerungs-/Reglerentwurfs sowie der Optimierung wächst rapide durch
  - Multiphysik Anwendungen (z.B. MEMS),
  - Parameterunsicherheiten,
  - Netzwerkstrukturen (z.B. Nanoelektronik, biochemische (metabolische) Netzwerke),
  - komplizierte 3D Geometrien (z.B. Werkzeugmaschinen).
- Fluch der Dimensionalität:
  Wachsende Leistungsfähigkeit der Computertechnik kann wachsende Modellkomplexität nicht kompensieren!
- Benötige reduzierte Modelle!

Modellreduktion als Schlüsseltechnologie

- Die Komplexität der Computersimulation und, insbesondere, des Steuerungs-/Reglerentwurfs sowie der Optimierung wächst rapide durch
  - Multiphysik Anwendungen (z.B. MEMS),
  - Parameterunsicherheiten,
  - Netzwerkstrukturen (z.B. Nanoelektronik, biochemische (metabolische) Netzwerke),
  - komplizierte 3D Geometrien (z.B. Werkzeugmaschinen).
- Fluch der Dimensionalität:
  Wachsende Leistungsfähigkeit der Computertechnik kann wachsende Modellkomplexität nicht kompensieren!
- Benötige reduzierte Modelle!

$$\Downarrow$$

Schlüsseltechnologie: Systemapproximation/Modellreduktion

Modellreduktion für lineare Systeme

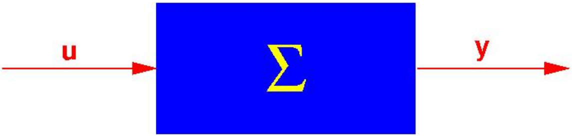
Dynamische Systeme/DAEs

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{rcll} \frac{d}{dt} q(x(t)) & = & f(x(t), u(t)), & x(t_0) = x_0, \\ y(t) & = & g(x(t), u(t)), & \end{array} \right.$$

mit

- Zuständen $x(t) \in \mathbb{R}^n$,
- Eingängen $u(t) \in \mathbb{R}^m$,
- Ausgängen $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

$\rightsquigarrow$ System differentiell-algebraischer Gleichungen (DAEs).

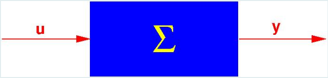


Modellreduktion für DAEs

Originalsystem

$$\Sigma : \begin{cases} \frac{d}{dt} q(x(t)) = f(x(t), u(t)), \\ y(t) = g(x(t), u(t)). \end{cases}$$

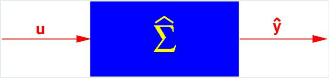
- Zustände $x(t) \in \mathbb{R}^n$,
- Eingänge $u(t) \in \mathbb{R}^m$,
- Ausgänge $y(t) \in \mathbb{R}^p$.



Reduziertes System

$$\widehat{\Sigma} : \begin{cases} \frac{d}{dt} \widehat{q}(x(t)) = \widehat{f}(t, \hat{x}(t), u(t)), \\ \hat{y}(t) = \widehat{g}(t, \hat{x}(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^r$, $r \ll n$
- Eingänge $u(t) \in \mathbb{R}^m$,
- Ausgänge $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$.



Ziel:

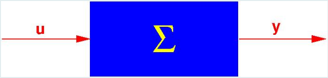
$\|y - \hat{y}\| < \mathrm{tol} \cdot \|u\|$ für alle zulässigen Eingangssignale.

Modellreduktion für DAEs

Originalsystem

$$\Sigma : \begin{cases} \frac{d}{dt} q(x(t)) = f(x(t), u(t)), \\ y(t) = g(x(t), u(t)). \end{cases}$$

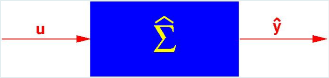
- Zustände $x(t) \in \mathbb{R}^n$,
- Eingänge $u(t) \in \mathbb{R}^m$,
- Ausgänge $y(t) \in \mathbb{R}^p$.



Reduziertes System

$$\widehat{\Sigma} : \begin{cases} \frac{d}{dt} \widehat{q}(x(t)) = \widehat{f}(t, \hat{x}(t), u(t)), \\ \hat{y}(t) = \widehat{g}(t, \hat{x}(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^r$, $r \ll n$
- Eingänge $u(t) \in \mathbb{R}^m$,
- Ausgänge $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$.



Ziel:

$\|y - \hat{y}\| < \text{tol} \cdot \|u\|$ für alle zulässigen Eingangssignale.

Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.
  Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!
- Erhalte physikalische Eigenschaften:
  - Stabilität
  - Passivität, d.h. es wird von Modellen passiver Bauteile keine Energie erzeugt.
- Reduzierte Modelle sollten erheblich schnellere Simulation erlauben.
- Reduzierte Modelle sollten physikalisch interpretierbar sein.

Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.
  Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!
- Erhalte physikalische Eigenschaften:
  - Stabilität
  - Passivität, d.h. es wird von Modellen passiver Bauteile keine Energie erzeugt.
- Reduzierte Modelle sollten erheblich schnellere Simulation erlauben.
- Reduzierte Modelle sollten physikalisch interpretierbar sein.

Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.
  Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!
- Erhalte physikalische Eigenschaften:
  - Stabilität
  - Passivität, d.h. es wird von Modellen passiver Bauteile keine Energie erzeugt.
- Reduzierte Modelle sollten erheblich schnellere Simulation erlauben.
- Reduzierte Modelle sollten physikalisch interpretierbar sein.

Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.
  Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!
- Erhalte physikalische Eigenschaften:
  - Stabilität
  - Passivität, d.h. es wird von Modellen passiver Bauteile keine Energie erzeugt.
- Reduzierte Modelle sollten erheblich schnellere Simulation erlauben.
- Reduzierte Modelle sollten physikalisch interpretierbar sein.

Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.
  Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!
- Erhalte physikalische Eigenschaften:
  - Stabilität
  - Passivität, d.h. es wird von Modellen passiver Bauteile keine Energie erzeugt.
- Reduzierte Modelle sollten erheblich schnellere Simulation erlauben.
- Reduzierte Modelle sollten physikalisch interpretierbar sein.

Ziele der Modellreduktion

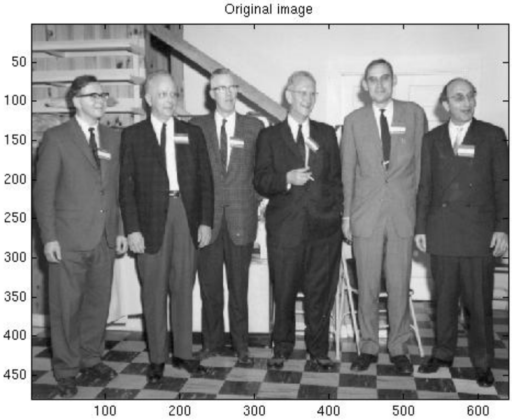
- Automatische Berechnung kompakter Modelle.
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.
  Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!
- Erhalte physikalische Eigenschaften:
  - Stabilität
  - Passivität, d.h. es wird von Modellen passiver Bauteile keine Energie erzeugt.
- Reduzierte Modelle sollten erheblich schnellere Simulation erlauben.
- Reduzierte Modelle sollten physikalisch interpretierbar sein.

Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.
  Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!
- Erhalte physikalische Eigenschaften:
  - Stabilität
  - Passivität, d.h. es wird von Modellen passiver Bauteile keine Energie erzeugt.
- Reduzierte Modelle sollten erheblich schnellere Simulation erlauben.
- Reduzierte Modelle sollten physikalisch interpretierbar sein.

Modellreduktion für lineare Systeme

Grundideen für Algorithmen



Organisationskomitee Gatlinburg/Householder Meeting 1964:
James H. Wilkinson, Wallace Givens, George Forsythe, Alston Householder, Peter Henrici, Fritz L. Bauer.

Modellreduktion für lineare Systeme

Grundideen für Algorithmen

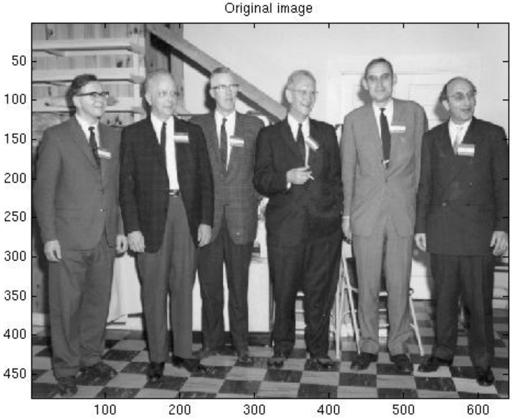


Bild $=$ $x \cdot y$ Pixel $= x$ Spalten (Vektoren) mit y Einträgen (Farbwerte)
$= y \times x$ Matrix.

Modellreduktion für lineare Systeme

Grundideen für Algorithmen

Satz: (Schmidt-Mirsky/Eckart-Young)

Beste Rang-r Approximation an $X \in \mathbb{R}^{y \times x}$:

$$\widehat{X} = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j u_j v_j^T,$$

wobei $X = U \Sigma V^T$ die Singulärwertzerlegung (SVD) von X ist und $U = [u_1, \ldots]$, $V = [v_1, \ldots]$, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots)$.

Der Approximationsfehler ist $\left\| X - \widehat{X} \right\|_2 = \sigma_{r+1}$.

Modellreduktion für lineare Systeme

Grundideen für Algorithmen

Satz: (Schmidt-Mirsky/Eckart-Young)

Beste Rang-r Approximation an $X \in \mathbb{R}^{y \times x}$:

$$\widehat{X} = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j u_j v_j^T,$$

wobei $X = U \Sigma V^T$ die Singulärwertzerlegung (SVD) von X ist und $U = [u_1, \ldots]$, $V = [v_1, \ldots]$, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots)$.

Der Approximationsfehler ist $\left\| X - \widehat{X} \right\|_2 = \sigma_{r+1}$.

Idee für Dimensionsreduktion

Statt X speichere $u_1, \ldots, u_r$, $\sigma_1 v_1, \ldots, \sigma_r v_r$.

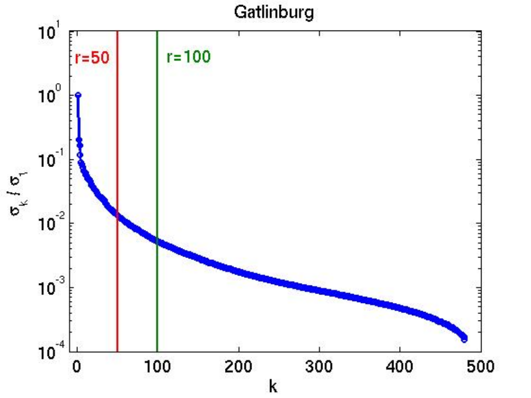
$\Rightarrow$ benötigter Speicherplatz $= r \cdot (x + y)$ statt $x \cdot y$.

Modellreduktion für lineare Systeme

Grundideen für Algorithmen

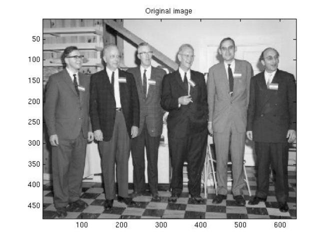
Datenkomprimierung mit SVD funktioniert, wenn die meisten Singulärwerte sehr klein sind.

Verhalten der Singulärwerte



Beispiel: Bilddatenkompression

Beispiel: MATLAB-Bild Gatlinburg

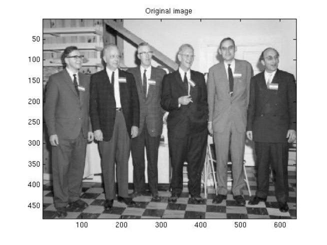


640×480 Pixel, ≈ 1229 KB

- Rang $r = 100$, ≈ 448 kb
- Rang $r = 50$, ≈ 224 kb

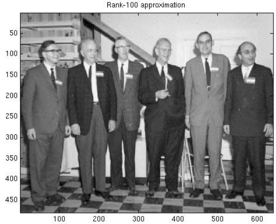
Beispiel: Bilddatenkompression

Beispiel: MATLAB-Bild Gatlinburg



640×480 Pixel, ≈ 1229 KB

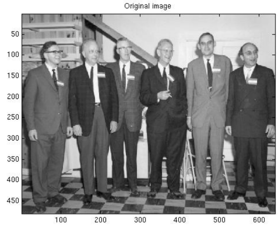
- Rang $r = 100$, ≈ 448 kb



- Rang $r = 50$, ≈ 224 kb

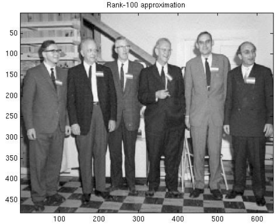
Beispiel: Bilddatenkompression

Beispiel: MATLAB-Bild Gatlinburg

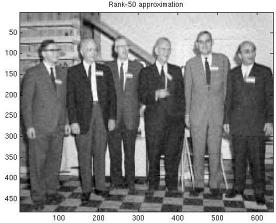


640×480 Pixel, ≈ 1229 KB

- Rang $r = 100$, ≈ 448 kb



- Rang $r = 50$, ≈ 224 kb



Modellreduktion für lineare Systeme

Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = f(t,x,u) &= Ax + Bu, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \\ y(t) = g(t,x,u) &= Cx + Du, \qquad C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p\times m}. \end{aligned}$$

Modellreduktion für lineare Systeme

Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = f(t,x,u) &= Ax + Bu, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \\ y(t) = g(t,x,u) &= Cx + Du, \qquad C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p\times m}. \end{aligned}$$

I/O–Abbildung im Zustandsraum ($D = 0$)

$$\mathcal{S} : u \mapsto y, \quad y(t) = (h \star u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

mit $h(s) = \begin{cases} Ce^{A(s)}B & \text{für } s > 0, \\ 0 & \text{für } s \leq 0. \end{cases}$

Modellreduktion für lineare Systeme

Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{array}{rclll} \dot{x}(t) = f(t,x,u) & = & Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) = g(t,x,u) & = & Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{array}$$

I/O–Abbildung im Zustandsraum ($D = 0$)

$$\mathcal{S} : u \mapsto y, \quad y(t) = (h \star u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

mit $h(s) = \begin{cases} Ce^{A(s)}B & \text{für } s > 0, \\ 0 & \text{für } s \leq 0. \end{cases}$

Beachte: Operator $\mathcal{S}$ ungeeignet für Approximation, Singulärwerte nicht diskret;

Modellreduktion für lineare Systeme

Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) = f(t,x,u) &= Ax + Bu, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m},\\
y(t) = g(t,x,u) &= Cx + Du, \qquad C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p\times m}.
\end{aligned}
$$

I/O–Abbildung im Zustandsraum ($D = 0$)

$$\mathcal{S} : u \mapsto y, \quad y(t) = (h \star u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

mit $h(s) = \begin{cases} Ce^{A(s)}B & \text{für } s > 0, \\ 0 & \text{für } s \leq 0. \end{cases}$

Beachte: Operator $\mathcal{S}$ ungeeignet für Approximation, Singulärwerte nicht diskret; für Modellreduktion verwende Hankel-Operator $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^{0} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\, d\tau \quad \text{for all } t > 0.$$

Modellreduktion für lineare Systeme

Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = f(t,x,u) &= Ax + Bu, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \\ y(t) = g(t,x,u) &= Cx + Du, \qquad C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p\times m}. \end{aligned}$$

I/O–Abbildung im Zustandsraum ($D = 0$)

$$\mathcal{S} : u \mapsto y, \quad y(t) = (h \star u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

mit $h(s) = \begin{cases} Ce^{A(s)}B & \text{für } s > 0, \\ 0 & \text{für } s \leq 0. \end{cases}$

Beachte: Operator $\mathcal{S}$ ungeeignet für Approximation, Singulärwerte nicht diskret; für Modellreduktion verwende Hankel-Operator $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^{0} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \quad \text{for all } t > 0.$$

$\mathcal{H}$ kompakt $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ hat diskrete SVD $\rightsquigarrow$ Hankel-Singulärwerte

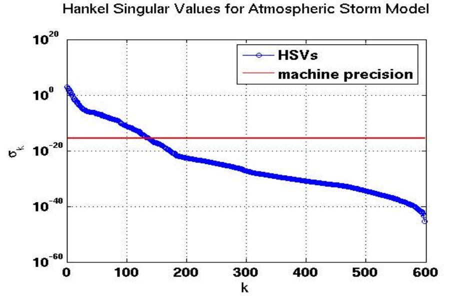
Modellreduktion für lineare Systeme

Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = f(t,x,u) &= Ax + Bu, \quad & A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad & B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \\ y(t) = g(t,x,u) &= Cx + Du, \quad & C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad & D \in \mathbb{R}^{p\times m}. \end{aligned}$$

I/O–Abbildung im Zustandsraum ($D = 0$)

$\mathcal{H}$ kompakt $\Rightarrow$
$\mathcal{H}$ hat diskrete SVD
$\rightsquigarrow$ Hankel-Singulärwerte



Modellreduktion für lineare Systeme

Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = f(t,x,u) &= Ax + Bu, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \\ y(t) = g(t,x,u) &= Cx + Du, \qquad C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p\times m}. \end{aligned}$$

I/O–Abbildung im Zustandsraum ($D = 0$)

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^{0} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \quad \text{for all } t > 0.$$

$\mathcal{H}$ kompakt $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ hat diskrete SVD

$\Rightarrow$ Bestapproximationsproblem bzgl. 2-induzierter Operatornorm (Hankel-Norm) wohlgestellt.

$\Rightarrow$ Lösung: Adamjan-Arov-Krein (AAK Theorie, '71/'78).

Modellreduktion für lineare Systeme

Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) = f(t,x,u) & = & Ax + Bu, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \\ y(t) = g(t,x,u) & = & Cx + Du, \qquad C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p\times m}. \end{array}$$

I/O–Abbildung im Zustandsraum ($D = 0$)

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^{0} Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau \quad \text{for all } t > 0.$$

$\mathcal{H}$ kompakt $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ hat diskrete SVD

$\Rightarrow$ Bestapproximationsproblem bzgl. 2-induzierter Operatornorm (Hankel-Norm) wohlgestellt.

$\Rightarrow$ Lösung: Adamjan-Arov-Krein (AAK Theorie, '71/'78).

Aber: Numerisch nicht umsetzbar für große Systeme.

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \\ y(t) = Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p\times m}. \end{cases}$$

(A, B, C, D) ist eine Realisierung von Σ (nicht eindeutig).

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) &= Cx + Du, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{cases}$$

(A, B, C, D) ist eine Realisierung von Σ (nicht eindeutig).

Modellreduktion durch Balancierung

Gegeben: Gramsche Matrizen $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, positiv definit (spd), und Transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$TPT^T = T^{-T}QT^{-1} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0.$$

Balancierung von Σ bzgl. P, Q:

$$\Sigma \equiv (A, B, C, D) \mapsto (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D) \equiv \Sigma.$$

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax + Bu, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \\ y(t) &= Cx + Du, \qquad C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p\times m}. \end{cases}$$

(A, B, C, D) ist eine Realisierung von Σ (nicht eindeutig).

Modellreduktion durch Balancierung

Gegeben: Gramsche Matrizen $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv definit (spd), und Transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$TPT^T = T^{-T}QT^{-1} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0.$$

Balancierung von Σ bzgl. P, Q:

$$\Sigma \equiv (A, B, C, D) \mapsto (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D) \equiv \Sigma.$$

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

Basis für Modellreduktionsverfahren

1. Gegeben $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$ und balancierende (bzgl. geg. P, Q spd) Transformation $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, berechne (nie explizit!)

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) \quad &\mapsto \quad (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D) \\ &= \quad \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, D \right) \end{aligned}$$

2. Abschneiden $\rightsquigarrow$ reduziertes Modell:

$$(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}) = (A_{11}, B_1, C_1, D).$$

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

Basis für Modellreduktionsverfahren

1. Gegeben $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$ und balancierende (bzgl. geg. P, Q spd) Transformation $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, berechne (nie explizit!)

$$\begin{aligned}(A, B, C, D) &\mapsto (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D) \\ &= \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, D \right)\end{aligned}$$

2. Abschneiden $\rightsquigarrow$ reduziertes Modell:

$$(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}) = (A_{11}, B_1, C_1, D).$$

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

Klassisches Balanciertes Abschneiden (BT)

Mullis/Roberts '76, Moore '81

- P/Q = Steuerbarkeits-/Beobachtbarkeits-Gramsche von $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$.
- Für stabile Systeme lösen P, Q duale Lyapunovgleichungen

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \qquad A^T Q + QA + C^T C = 0.$$

- $\Lambda(PQ)^{\frac{1}{2}} = \{\sigma_1^{\mathrm{BT}}, \ldots, \sigma_n^{\mathrm{BT}}\}$ sind Hankel-Singulärwerte (HSVs) von Σ. HSVs sind Systeminvarianten ("Energieerhaltungs"-Interpretation).
- Stabilitätserhaltend, kann auf instabile Systeme ohne rein imaginäre Pole erweitert werden [Zhou/Salomon/Wu '99].
- Passivitätserhaltend für symmetrische, passive Systeme.
- Berechenbare Fehlerabschätzung als Nebenprodukt der Berechnung:

$$\|y - y^{\mathrm{BT}}\|_2 \leq 2 \sum_{j=r+1}^{n} \sigma_j^{\mathrm{BT}} \|u\|_2,$$

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

Klassisches Balanciertes Abschneiden (BT)

MULLIS/ROBERTS '76, MOORE '81

- $P/Q =$ Steuerbarkeits-/Beobachtbarkeits-Gramsche von $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$.
- Für stabile Systeme lösen P, Q duale Lyapunovgleichungen

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \qquad A^TQ + QA + C^TC = 0.$$

- $\Lambda(PQ)^{\frac{1}{2}} = \{\sigma_1^{\mathrm{BT}}, \ldots, \sigma_n^{\mathrm{BT}}\}$ sind Hankel-Singulärwerte (HSVs) von Σ. HSVs sind Systeminvarianten ("Energieerhaltungs"-Interpretation).
- Stabilitätserhaltend, kann auf instabile Systeme ohne rein imaginäre Pole erweitert werden [ZHOU/SALOMON/WU '99].
- Passivitätserhaltend für symmetrische, passive Systeme.
- Berechenbare Fehlerabschätzung als Nebenprodukt der Berechnung:

$$\|y - y^{\mathrm{BT}}\|_2 \leq 2 \sum_{j=r+1}^{n} \sigma_j^{\mathrm{BT}} \|u\|_2,$$

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

Klassisches Balanciertes Abschneiden (BT)

MULLIS/ROBERTS '76, MOORE '81

- $P/Q =$ Steuerbarkeits-/Beobachtbarkeits-Gramsche von $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$.
- Für stabile Systeme lösen P, Q duale Lyapunovgleichungen

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \qquad A^T Q + QA + C^T C = 0.$$

- $\Lambda(PQ)^{\frac{1}{2}} = \{\sigma_1^{\mathrm{BT}}, \ldots, \sigma_n^{\mathrm{BT}}\}$ sind Hankel-Singulärwerte (HSVs) von Σ. HSVs sind Systeminvarianten ("Energieerhaltungs"-Interpretation).
- Stabilitätserhaltend, kann auf instabile Systeme ohne rein imaginäre Pole erweitert werden [ZHOU/SALOMON/WU '99].
- Passivitätserhaltend für symmetrische, passive Systeme.
- Berechenbare Fehlerabschätzung als Nebenprodukt der Berechnung:

$$\|y - y^{\mathrm{BT}}\|_2 \leq 2 \sum_{j=r+1}^{n} \sigma_j^{\mathrm{BT}} \|u\|_2,$$

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

Klassisches Balanciertes Abschneiden (BT)

MULLIS/ROBERTS '76, MOORE '81

- $P/Q =$ Steuerbarkeits-/Beobachtbarkeits-Gramsche von $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$.
- Für stabile Systeme lösen P, Q duale Lyapunovgleichungen

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \qquad A^T Q + QA + C^T C = 0.$$

- $\Lambda(PQ)^{\frac{1}{2}} = \{\sigma_1^{\mathrm{BT}}, \ldots, \sigma_n^{\mathrm{BT}}\}$ sind Hankel-Singulärwerte (HSVs) von Σ. HSVs sind Systeminvarianten ("Energieerhaltungs"-Interpretation).
- Stabilitätserhaltend, kann auf instabile Systeme ohne rein imaginäre Pole erweitert werden [ZHOU/SALOMON/WU '99].
- Passivitätserhaltend für symmetrische, passive Systeme.
- Berechenbare Fehlerabschätzung als Nebenprodukt der Berechnung:

$$\|y - y^{\mathrm{BT}}\|_2 \leq 2 \sum_{j=r+1}^{n} \sigma_j^{\mathrm{BT}} \|u\|_2,$$

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

- Wahl anderer Gramscher Matrizen liefert weitere Verfahren, die für spezielle Anforderungen (z.B. Minimalphasigkeit, Passivität) geeignet sind.
- Anwendung auf Systeme mit Massematrix ($E\dot{x} = Ax + Bu$) möglich, ohne $E^{-1}A, E^{-1}B$ zu bilden!

  Varianten für E singulär existieren.
- Anwendung auf Systeme 2. Ordnung (mechanische Systeme) entweder durch Linearisierung und Anwendung auf resultierendes LTI System oder direkt auf Systeme 2. Ordnung.
- Klassische Implementierungen kosten $\mathcal{O}(n^3)$ Rechenoperationen und benötigen $\mathcal{O}(n^2)$ Speicher $\rightsquigarrow$ viel zu teuer für große Probleme mit $n \gg 1000$, insbesondere für strukturdynamische FEM-Modelle!
- Seit ca. 10 Jahren Entwicklungen in der Numerischen Linearen Algebra, die es durch Strukturausnutzung der FEM Matrizen erlauben, sehr große Lyapunovgleichungen zu lösen.

  $n = 1.000.000$ heutzutage in MATLAB möglich!
  Rechenzeit $< 1h$ auf quadcore Compute-Server.

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

- Wahl anderer Gramscher Matrizen liefert weitere Verfahren, die für spezielle Anforderungen (z.B. Minimalphasigkeit, Passivität) geeignet sind.
- Anwendung auf Systeme mit Massematrix ($E\dot{x} = Ax + Bu$) möglich, ohne $E^{-1}A, E^{-1}B$ zu bilden!

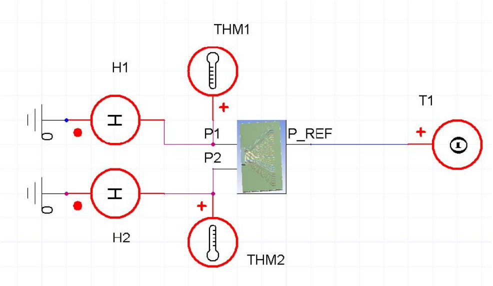
  Varianten für E singulär existieren.
- Anwendung auf Systeme 2. Ordnung (mechanische Systeme) entweder durch Linearisierung und Anwendung auf resultierendes LTI System oder direkt auf Systeme 2. Ordnung.
- Klassische Implementierungen kosten $\mathcal{O}(n^3)$ Rechenoperationen und benötigen $\mathcal{O}(n^2)$ Speicher $\rightsquigarrow$ viel zu teuer für große Probleme mit $n \gg 1000$, insbesondere für strukturdynamische FEM-Modelle!
- Seit ca. 10 Jahren Entwicklungen in der Numerischen Linearen Algebra, die es durch Strukturausnutzung der FEM Matrizen erlauben, sehr große Lyapunovgleichungen zu lösen.

  $n = 1.000.000$ heutzutage in MATLAB möglich!
  Rechenzeit $< 1h$ auf quadcore Compute-Server.

Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

Elektro-thermische Simulation einer integrierten Schaltung [Quelle: Evgenii Rudnyi, CADFEM GmbH]

- Testschaltung in Simplorer mit 2 Transistoren.
- Konservatives thermisches Teilsystem in Simplorer:
  Spannung $\rightsquigarrow$ Temperatur, Stromstärke $\rightsquigarrow$ Wärmefluss.
- Originalmodell: $n = 270.593$, $m = p = 2 \Rightarrow$
  Rechenzeiten (CMESS auf Intel Xeon dualcore 3GHz, 1 Thread):
  - Lösung der Lyapunovgleichungen: $\approx 22min$.
  - Berechnung der red. Modelle: 44sec. ($r = 20$) bis 49sec. ($r = 70$).
  - Bode-Diagramm (MATLAB auf Intel Core i7, 2,67GHz, 12GB):
    mit Originalsystem 7,5h, mit reduziertem System $<$ 1min.

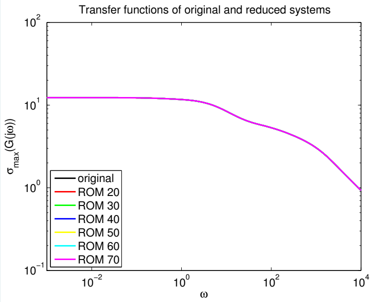


Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

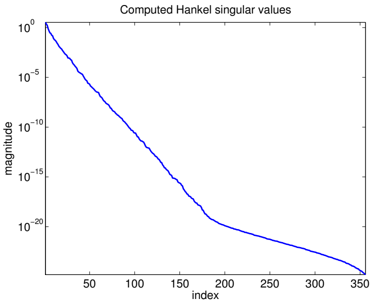
Elektro-thermische Simulation einer integrierten Schaltung [Quelle: Evgenii Rudnyi, CADFEM GmbH]

- Originalmodell: $n = 270.593$, $m = p = 2 \Rightarrow$
  Rechenzeiten (CMESS auf Intel Xeon dualcore 3GHz, 1 Thread):
  - Lösung der Lyapunovgleichungen: $\approx 22min$.
  - Berechnung der red. Modelle: 44sec. ($r = 20$) bis 49sec. ($r = 70$).
  - Bode-Diagramm (MATLAB auf Intel Core i7, 2,67GHz, 12GB):
    mit Originalsystem 7,5h, mit reduziertem System < 1min.

Bode-Diagramm (Amplitude)



Hankel-Singulärwerte

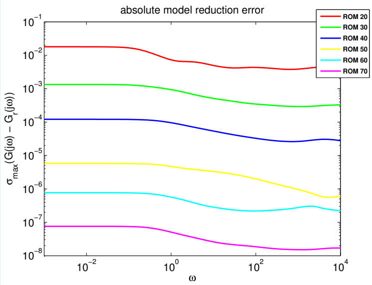


Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

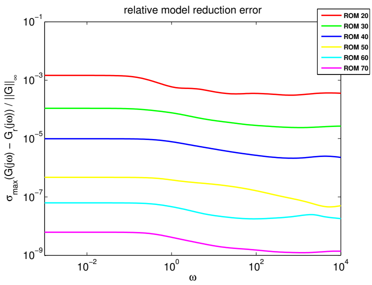
Elektro-thermische Simulation einer integrierten Schaltung [Quelle: Evgenii Rudnyi, CADFEM GmbH]

- Originalmodell: $n = 270.593$, $m = p = 2 \Rightarrow$
  Rechenzeiten (CMESS auf Intel Xeon dualcore 3GHz, 1 Thread):
  - Lösung der Lyapunovgleichungen: $\approx 22min$.
  - Berechnung der red. Modelle: 44sec. ($r = 20$) bis 49sec. ($r = 70$).
  - Bode-Diagramm (MATLAB auf Intel Core i7, 2,67GHz, 12GB):
    mit Originalsystem 7,5h, mit reduziertem System < 1min.

Absolute Fehler



Relative Fehler



Ansätze zur nichtlinearen Modellreduktion

- Viele nichtlineare Systeme lassen sich durch quadratisch-bilineare differentiell-algebraische Gleichungen (QBDAEs) der Form

$$
\begin{aligned}
E\dot{x} &= A_1 x + A_2 x \otimes x + Nxu + bu, \\
y &= cx,
\end{aligned}
$$

  darstellen. (Hier: $E, A_1, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n^2}$, $b, c^T \in \mathbb{R}^n$.)
- Kombination quadratischer und bilinearer Regelungssysteme.
- Charakterisierung des Input-Output-Verhaltens durch verallgemeinerte Übertragungsfunktionen, z.B.

$$
\begin{aligned}
H_1(s) &= c\,\underbrace{(sE - A_1)^{-1} b}_{G(s)}, \\
H_2(s_1, s_2) &= \frac{1}{2} c\,((s_1 + s_2)E - A_1)^{-1} \left[A_2(G(s_1) \otimes G(s_2) + G(s_2) \otimes G(s_1)) \right. \\
&\qquad \left. + N\,(G(s_1) + G(s_2))\right].
\end{aligned}
$$

Ansätze zur nichtlinearen Modellreduktion

Welche Systeme erlauben solch eine Transformation?

Satz [Gu 2009]

Gegeben sei nichtlineares System Σ

$$\dot{x} = a_0 x + a_1 g_1(x) + \ldots + a_k g_k(x) + bu,$$

wobei $g_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Verknüpfungen rationaler, logarithmischer, trigonometrischer, Exponential- und Wurzelfunktionen sind.

$\Longrightarrow$ Darstellung von Σ als quadratisch-bilineares DAE System der Dimension $N > n$ möglich.

- Transformation ist nicht eindeutig.
- Originales System wird vor der Reduktion ggf. zunächst vergrößert.
- Minimale Dimension N ist unklar.

Ansätze zur nichtlinearen Modellreduktion

Beispiel

- Einfaches zweidimensionales nichtlineares System:

$$\dot{x}_1 = \exp(-x_2) \cdot \sqrt{x_1^2 + 1},$$
$$\dot{x}_2 = \sin x_2 + u.$$

- Einführung neuer Variablen, z.B.

$$x_3 := \exp(-x_2),\ x_4 := \sqrt{x_1^2 + 1},\ x_5 := \sin x_2,\ x_6 := \cos x_2.$$

- System kann durch QBDAE der Dimension 6 repräsentiert werden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \cdot x_4, & \dot{x}_2 &= x_5 + u, \\ \dot{x}_3 &= -x_3 \cdot (x_5 + u), & \dot{x}_4 &= \frac{2 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4}{2 \cdot x_4}, \\ \dot{x}_5 &= x_6 \cdot (x_5 + u), & \dot{x}_6 &= -x_5 \cdot (x_5 + u). \end{aligned}$$

Ansätze zur nichtlinearen Modellreduktion

Multimomentenabgleich für QBDAEs

- Erzeuge reduziertes Modell durch Projection:

$$\hat{E} = Z^T E Z, \quad \hat{A}_1 = Z^T A_1 Z, \quad \hat{N} = Z^T N Z,$$
$$\hat{A}_2 = Z^T A_2 Z \otimes Z, \quad \hat{b} = Z^T b, \quad \hat{c} = cZ$$

- Rationale Hermite-Interpolation der Übertragungsfunktionen am Entwicklungspunkt σ durch Verwendung von Krylovräumen, z.B.

$$\begin{aligned}
\mathrm{span}\{V\} &= \mathcal{K}_6\left(A_\sigma E, A_\sigma b\right)\\
\mathrm{span}\{W_1\} &= \mathcal{K}_3\left(A_{2\sigma} E, A_{2\sigma}(A_2 V_1 \otimes V_1 - N_1 V_1)\right)\\
\mathrm{span}\{W_2\} &= \mathcal{K}_2\left(A_{2\sigma} E, A_{2\sigma}(A_2(V_2 \otimes V_1 + V_1 \otimes V_2) - N_1 V_2)\right)\\
\mathrm{span}\{W_3\} &= \mathcal{K}_1\left(A_{2\sigma} E, A_{2\sigma}(A_2(V_2 \otimes V_2 + V_2 \otimes V_2))\right)\\
\mathrm{span}\{W_4\} &= \mathcal{K}_1\left(A_{2\sigma} E, A_{2\sigma}(A_2(V_3 \otimes V_1 + V_1 \otimes V_3) - N_1 V_3)\right),
\end{aligned}$$

mit $A_\sigma = (A_1 - \sigma E)^{-1}$ und $V_i = i$te Spalte von V
$\rightarrow$ Ableitungen bis zur Ordnung 5 (H_1) bzw. 2 (H_2) werden interpoliert.

Ansätze zur nichtlinearen Modellreduktion

Numerisches Beispiel

- FitzHugh-Nagumo System: Einfaches Modell für Neuronen-(de-)aktivierung.

$$\begin{aligned} \epsilon v_t(x,t) &= \epsilon^2 v_{xx}(x,t) + f(v(x,t)) - w(x,t) + g, \\ w_t(x,t) &= hv(x,t) - \gamma w(x,t) + g, \end{aligned}$$

mit $f(v) = v(v-0.1)(1-v)$ und Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} v(x,0) &= 0, & w(x,0) &= 0, & x &\in [0,1] \\ v_x(0,t) &= -i_0(t), & v_x(1,t) &= 0, & t &\geq 0, \end{aligned}$$

wobei $\epsilon = 0.015, h = 0.5, \gamma = 2, g = 0.05, i_0(t) = 50000t^3 \exp(-15t)$

- Betrachte Parameter g als zusätzlichen Eingang.
- Dimension $n = 2 \cdot 400$, QBDAE Dimension $N = 3 \cdot 400$, reduzierte QBDAE Dimension $r = 26$.

[Benner/Breiten 2010]

Ansätze zur nichtlinearen Modellreduktion

Numerisches Beispiel

3d Phasenraum

[Benner/Breiten 2010]

Weitere Themen

- Modellreduktion:
  - Parametrische Systeme,
  - nichtlineare Systeme,
  - diskrete/stochastische Systeme,
  - Anwendungen in der Mikrosystemtechnik und Nanoelektronik, im Werkzeugmaschinenbau und der Fahrzeugtechnik.
- Numerische Lineare Algebra:
  - Eigenwertprobleme,
  - lineare und nichtlineare Matrixgleichungen,
  - hierarchische Matrizen und Tensoren,
  - Vorkonditionierung,
- Optimierung unter PDE-Beschränkungen,
- Parallele Algorithmen,
- Mathematische Software, z.B. SLICOT (siehe `www.slicot.org`).

Weitere Themen

- Modellreduktion:
  - Parametrische Systeme,
  - nichtlineare Systeme,
  - diskrete/stochastische Systeme,
  - Anwendungen in der Mikrosystemtechnik und Nanoelektronik, im Werkzeugmaschinenbau und der Fahrzeugtechnik.
- Numerische Lineare Algebra:
  - Eigenwertprobleme,
  - lineare und nichtlineare Matrixgleichungen,
  - hierarchische Matrizen und Tensoren,
  - Vorkonditionierung,
- Optimierung unter PDE-Beschränkungen,
- Parallele Algorithmen,
- Mathematische Software, z.B. SLICOT (siehe www.slicot.org). Vertriebspartner SynOptio GmbH Berlin.