



*Workshop Simulation, Identifizierung und Optimierung  
nichtlinearer mechanischer Systeme  
Magdeburg, 30. März 2011*

# **Modellreduktion: Moderne vs. modale Methoden**

Peter Benner  
(mit Patrick Kürschner und Jens Saak)

Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme  
Computational Methods in Systems and Control Theory  
Magdeburg

- 1 Einleitung
  - Modellreduktion
  - Lineare Systeme
  - Modale Methoden
  - Ziele
  - Methoden
- 2 Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden
  - Numerische Beispiele
- 3 Systeme zweiter Ordnung
  - Ergebnisse einer FVV Vorstudie
  - Dominante Eigenwerte
- 4 Parameter-erhaltende Modellreduktion
- 5 Ansätze zur nichtlinearen Modellreduktion
- 6 Zusammenfassung und Ausblick

# Einleitung

## Dynamische Systeme/DAEs

$$\Sigma : \begin{cases} \frac{d}{dt}q(x(t)) & = f(x(t), u(t)), & x(t_0) = x_0, \\ y(t) & = g(x(t), u(t)), \end{cases}$$

mit

- **Zuständen**  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,
- **Eingängen**  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- **Ausgängen**  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ .

↪ System differentiell-algebraischer Gleichungen (DAEs).



# Modellreduktion für DAEs

## Originalsystem

$$\Sigma : \begin{cases} \frac{d}{dt} q(x(t)) = f(x(t), u(t)), \\ y(t) = g(x(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,
- Eingänge  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- Ausgänge  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ .



## Reduziertes System

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{q}(x(t)) = \hat{f}(t, \hat{x}(t), u(t)), \\ \hat{y}(t) = \hat{g}(t, \hat{x}(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $r \ll n$
- Eingänge  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- Ausgänge  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ .



# Modellreduktion für DAEs

## Originalsystem

$$\Sigma : \begin{cases} \frac{d}{dt} q(x(t)) = f(x(t), u(t)), \\ y(t) = g(x(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,
- Eingänge  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- Ausgänge  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ .



## Reduziertes System

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{q}(x(t)) = \hat{f}(t, \hat{x}(t), u(t)), \\ \hat{y}(t) = \hat{g}(t, \hat{x}(t), u(t)). \end{cases}$$

- Zustände  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $r \ll n$
- Eingänge  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,
- Ausgänge  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ .



Ziel:

$\|y - \hat{y}\| < \text{tol} \cdot \|u\|$  für alle zulässigen Eingangssignale.

# Modellreduktion für Lineare Systeme

## Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) = g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}.\end{aligned}$$

# Modellreduktion für Lineare Systeme

## Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) = g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}.\end{aligned}$$

## I/O-Abbildung im Zustandsraum ( $D = 0$ )

$$S : u \mapsto y, \quad y(t) = (h \star u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

$$\text{mit } h(s) = \begin{cases} Ce^{A(s)}B & \text{für } s > 0, \\ 0 & \text{für } s \leq 0. \end{cases}$$

# Modellreduktion für Lineare Systeme

## Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) = g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}.\end{aligned}$$

## I/O-Abbildung im Zustandsraum ( $D = 0$ )

$$\mathcal{S} : u \mapsto y, \quad y(t) = (h \star u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

$$\text{mit } h(s) = \begin{cases} Ce^{A(s)}B & \text{für } s > 0, \\ 0 & \text{für } s \leq 0. \end{cases}$$

Beachte: Operator  $\mathcal{S}$  ungeeignet für Approximation, Singulärwerte nicht diskret;



# Modellreduktion für Lineare Systeme

## Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) = g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}.\end{aligned}$$

## I/O–Abbildung im Zustandsraum ( $D = 0$ )

$$\mathcal{S} : u \mapsto y, \quad y(t) = (h \star u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

$$\text{mit } h(s) = \begin{cases} Ce^{A(s)}B & \text{für } s > 0, \\ 0 & \text{für } s \leq 0. \end{cases}$$

Beachte: Operator  $\mathcal{S}$  ungeeignet für Approximation, Singulärwerte nicht diskret; für Modellreduktion verwende Hankel-Operator  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^0 Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad \text{for all } t > 0.$$

# Modellreduktion für Lineare Systeme

## Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) = g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}.\end{aligned}$$

## I/O-Abbildung im Zustandsraum ( $D = 0$ )

$$\mathcal{S} : u \mapsto y, \quad y(t) = (h \star u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

$$\text{mit } h(s) = \begin{cases} Ce^{A(s)}B & \text{für } s > 0, \\ 0 & \text{für } s \leq 0. \end{cases}$$

Beachte: Operator  $\mathcal{S}$  ungeeignet für Approximation, Singulärwerte nicht diskret; für Modellreduktion verwende Hankel-Operator  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^0 Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad \text{for all } t > 0.$$

$\mathcal{H}$  kompakt  $\Rightarrow \mathcal{H}$  hat diskrete SVD  $\rightsquigarrow$  Hankel-Singulärwerte

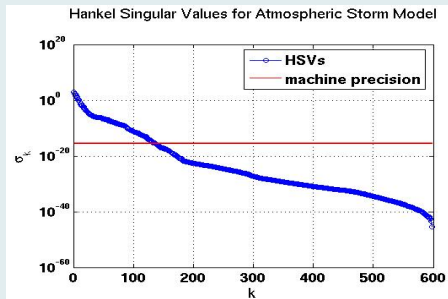
# Modellreduktion für Lineare Systeme

## Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) = g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}.\end{aligned}$$

## I/O–Abbildung im Zustandsraum ( $D = 0$ )

$\mathcal{H}$  kompakt  $\Rightarrow$   
 $\mathcal{H}$  hat diskrete SVD  
 $\rightsquigarrow$  Hankel-Singulärwerte



# Modellreduktion für Lineare Systeme

## Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) = g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}.\end{aligned}$$

## I/O-Abbildung im Zustandsraum ( $D = 0$ )

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^0 Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad \text{for all } t > 0.$$

$\mathcal{H}$  kompakt  $\Rightarrow \mathcal{H}$  hat diskrete SVD

$\Rightarrow$  Bestapproximationsproblem bzgl. 2-induzierter Operatornorm  
([Hankel-Norm](#)) wohlgestellt.

$\Rightarrow$  Lösung: [Adamjan-Arov-Krein \(AAK Theorie, '71/'78\)](#).

# Modellreduktion für Lineare Systeme

## Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = f(t, x, u) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) = g(t, x, u) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}.\end{aligned}$$

## I/O-Abbildung im Zustandsraum ( $D = 0$ )

$$\mathcal{H} : u_- \mapsto y_+, \quad y_+(t) = \int_{-\infty}^0 Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad \text{for all } t > 0.$$

$\mathcal{H}$  kompakt  $\Rightarrow \mathcal{H}$  hat diskrete SVD

$\Rightarrow$  Bestapproximationsproblem bzgl. 2-induzierter Operatornorm  
([Hankel-Norm](#)) wohlgestellt.

$\Rightarrow$  Lösung: [Adamjan-Arov-Krein \(AAK Theorie, '71/'78\)](#).

**Aber: Numerisch nicht umsetzbar für große Systeme.**

# Modales Abschneiden

Idee:

Projiziere Zustandsraum auf  $A$ -invarianten Unterraum  $\mathcal{V}$ , wobei

$$\mathcal{V} = \text{span}(v_1, \dots, v_r),$$

$v_k =$  Eigenvektoren zu dominanten **Moden = Eigenwerten** von  $A$ .

# Modales Abschneiden

## Idee:

Projiziere Zustandsraum auf  $A$ -invarianten Unterraum  $\mathcal{V}$ , wobei

$$\mathcal{V} = \text{span}(v_1, \dots, v_r),$$

$v_k$  = Eigenvektoren zu dominanten Moden = Eigenwerten von  $A$ .

## Eigenschaften:

- Einfache Berechnung für große Systeme, z.B. mit Krylovraum-Verfahren (Lanczos, Arnoldi), Jacobi-Davidson-Methode.
- Fehlerabschätzung für diagonalisierbare Matrizen:

$$\|G - \hat{G}\|_{H_\infty} \leq \text{cond}_2(T) \|C_2\|_2 \|B_2\|_2 \frac{1}{\min_{\lambda \in \Lambda(A_2)} |\text{Re}(\lambda)|},$$

wobei  $T^{-1}AT = \text{diag}(A_1, A_2)$ .

# Modales Abschneiden

## Idee:

Projiziere Zustandsraum auf  $A$ -invarianten Unterraum  $\mathcal{V}$ , wobei

$$\mathcal{V} = \text{span}(v_1, \dots, v_r),$$

$v_k$  = Eigenvektoren zu dominanten Moden = Eigenwerten von  $A$ .

## Schwierigkeiten:

- Eigenwerte sind nur bei selbstadjungierten Problemen relevant.
- Dominanzmaße schwierig zu berechnen.  
(Litz (1979) Verwendet Jordan-Normalform)  
↔ Neuere Entwicklung: DPA (später).
- Für Fehlerabschätzung benötigte gesamte Eigenvektormatrix.



# Guyan-Reduktion (Statische Kondensation)

## Idee:

- Komponenten  $x_j(t)$  werden als Zustände im Knoten  $j$  eines (FE-)Netzes betrachtet.
- Sortiere und partitioniere Zustandsvektor  $x = \begin{bmatrix} x_e \\ x_i \end{bmatrix}$  mit
  - $x_e \in \mathbb{R}^r$  — äußere Knoten (**Master-Knoten**),
  - $x_i \in \mathbb{R}^{n-r}$  — innere Knoten.
- Eliminiere alle inneren Knoten, mathematisch:

$$\hat{A} = A_e - A_{ei}A_i^{-1}A_{ie}$$

**Schur-Komplement** von  $A_i$  bzgl.  $A = \begin{bmatrix} A_e & A_{ei} \\ A_{ie} & A_i \end{bmatrix}$ .

- Löse nach  $x_e$  auf.

# Guyan-Reduktion (Statische Kondensation)

## Eigenschaften:

- + Einfache Berechnung für große Systeme mit definitiver  $A$ -Matrix, z.B. mit CG.
- + Natürlicher Ansatz im Zusammenhang mit Gebietszerlegungsmethoden.
- ± In ANSYS als Dimensionsreduktionsverfahren implementiert.
- ± Hierarchische Anwendung ([Substrukturierung](#)) in der modalen Basis ([Craig-Bampton-Verfahren](#)) liefert brauchbare Methoden für Anwendungen in der Strukturmechanik.
- Dynamik des Systems wird ignoriert.

# Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.  
Modale Methoden: Nein, "Angstmoden"!

# Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.  
Modale Methoden: Nein, "Angstmoden"!
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.  
Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!  
Modale Methoden: Nicht vorhanden/zu grob.

# Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.  
Modale Methoden: Nein, "Angstmoden"!
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.  
Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!  
Modale Methoden: Nicht vorhanden/zu grob.
- Erhalte physikalische Eigenschaften:

# Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.  
Modale Methoden: Nein, "Angstmoden"!
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.  
Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!  
Modale Methoden: Nicht vorhanden/zu grob.
- Erhalte physikalische Eigenschaften:
  - Stabilität  
Modale Methoden: Ja.

# Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.  
Modale Methoden: Nein, "Angstmoden"!
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.  
Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!  
Modale Methoden: Nicht vorhanden/zu grob.
- Erhalte physikalische Eigenschaften:
  - Stabilität  
Modale Methoden: Ja.
  - Passivität, d.h. es wird von Modellen passiver Bauteile keine Energie erzeugt.  
Modale Methoden: u.U. ja.

# Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.  
Modale Methoden: Nein, "Angstmoden"!
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.  
Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!  
Modale Methoden: Nicht vorhanden/zu grob.
- Erhalte physikalische Eigenschaften:
  - Stabilität  
Modale Methoden: Ja.
  - Passivität, d.h. es wird von Modellen passiver Bauteile keine Energie erzeugt.  
Modale Methoden: u.U. ja.
- Reduzierte Modelle sollten erheblich schnellere Simulation erlauben.  
Modale Methoden: Ja.



# Ziele der Modellreduktion

- Automatische Berechnung kompakter Modelle.  
Modale Methoden: Nein, "Angstmoden"!
- Fehler in den Ausgangssignalen des reduzierten Modells dürfen eine vorgegebene Fehlertoleranz nicht überschreiten.  
Benötige berechenbare Fehlerabschätzungen!  
Modale Methoden: Nicht vorhanden/zu grob.
- Erhalte physikalische Eigenschaften:
  - Stabilität  
Modale Methoden: Ja.
  - Passivität, d.h. es wird von Modellen passiver Bauteile keine Energie erzeugt.  
Modale Methoden: u.U. ja.
- Reduzierte Modelle sollten erheblich schnellere Simulation erlauben.  
Modale Methoden: Ja.
- Reduzierte Modelle sollten physikalisch interpretierbar sein.  
Modale Methoden: Ja.

# Methoden

- Kompakte Modellierung
- Modales Abschneiden (inkl. Gyan-Reduktion/Substrukturierung/Craig-Bampton/CMS)
- Moderne Methoden:
  - Interpolatorische Methoden: Padé-Approximation, (iterative, rationale) Krylovraumverfahren
  - **Balancierungstechniken**
  - POD/reduzierte Basen

# Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

## Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{cases}$$

$(A, B, C, D)$  ist eine Realisierung von  $\Sigma$  (nicht eindeutig).

# Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

## Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{cases}$$

$(A, B, C, D)$  ist eine Realisierung von  $\Sigma$  (nicht eindeutig).

## Modellreduktion durch Balancierung

Gegeben: Gramsche Matrizen  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch, positiv definit (spd), und Transformation  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass

$$TPT^T = T^{-T}QT^{-1} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0.$$

# Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

## Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax + Bu, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, & B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y(t) &= Cx + Du, & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, & D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{cases}$$

$(A, B, C, D)$  ist eine Realisierung von  $\Sigma$  (nicht eindeutig).

## Modellreduktion durch Balancierung

Gegeben: Gramsche Matrizen  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch, positiv definit (spd), und Transformation  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass

$$TPT^T = T^{-T}QT^{-1} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0.$$

Balancierung von  $\Sigma$  bzgl.  $P, Q$ :

$$\Sigma \equiv (A, B, C, D) \mapsto (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D) \equiv \Sigma.$$

# Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

## Basis für Modellreduktionsverfahren

- Gegeben  $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$  und balancierende (bzgl. geg.  $P, Q$  spd) Transformation  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , berechne (nie explizit!)

$$\begin{aligned}
 (A, B, C, D) &\mapsto (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D) \\
 &= \left( \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, D \right)
 \end{aligned}$$

# Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

## Basis für Modellreduktionsverfahren

- ① Gegeben  $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$  und balancierende (bzgl. geg.  $P, Q$  spd) Transformation  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , berechne (nie explizit!)

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) &\mapsto (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D) \\ &= \left( \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, D \right) \end{aligned}$$

- ② Abschneiden  $\rightsquigarrow$  reduziertes Modell:

$$(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}) = (A_{11}, B_1, C_1, D).$$

# Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

## Klassisches Balanciertes Abschneiden (BT)

MULLIS/ROBERTS '76, MOORE '81

- $P/Q$  = Steuerbarkeits-/Beobachtbarkeits-Gramsche von  $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$ .
- Für stabile Systeme lösen  $P, Q$  duale **Lyapunovgleichungen**

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0.$$



# Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

## Klassisches Balanciertes Abschneiden (BT)

MULLIS/ROBERTS '76, MOORE '81

- $P/Q$  = Steuerbarkeits-/Beobachtbarkeits-Gramsche von  $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$ .
- Für stabile Systeme lösen  $P, Q$  duale **Lyapunovgleichungen**

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0.$$

- $\Lambda(PQ)^{\frac{1}{2}} = \{\sigma_1^{\text{BT}}, \dots, \sigma_n^{\text{BT}}\}$  sind **Hankel-Singulärwerte (HSVs)** von  $\Sigma$ .  
HSVs sind **Systeminvarianten** ("Energieerhaltungs"-Interpretation).

# Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

## Klassisches Balanciertes Abschneiden (BT)

MULLIS/ROBERTS '76, MOORE '81

- $P/Q$  = Steuerbarkeits-/Beobachtbarkeits-Gramsche von  $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$ .
- Für stabile Systeme lösen  $P, Q$  duale **Lyapunovgleichungen**

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0.$$

- $\Lambda(PQ)^{\frac{1}{2}} = \{\sigma_1^{\text{BT}}, \dots, \sigma_n^{\text{BT}}\}$  sind Hankel-Singulärwerte (HSVs) von  $\Sigma$ . HSVs sind Systeminvarianten ("Energieerhaltungs"-Interpretation).
- **Stabilitätserhaltend**, kann auf instabile Systeme ohne rein imaginäre Pole erweitert werden [ZHOU/SALOMON/WU '99].
- **Passivitätserhaltend** für symmetrische, passive Systeme.

# Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

## Klassisches Balanciertes Abschneiden (BT)

MULLIS/ROBERTS '76, MOORE '81

- $P/Q$  = Steuerbarkeits-/Beobachtbarkeits-Gramsche von  $\Sigma \equiv (A, B, C, D)$ .
- Für stabile Systeme lösen  $P, Q$  duale **Lyapunovgleichungen**

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0.$$

- $\Lambda(PQ)^{\frac{1}{2}} = \{\sigma_1^{\text{BT}}, \dots, \sigma_n^{\text{BT}}\}$  sind Hankel-Singulärwerte (HSVs) von  $\Sigma$ . HSVs sind Systeminvarianten ("Energieerhaltungs"-Interpretation).
- Stabilitätserhaltend, kann auf instabile Systeme ohne rein imaginäre Pole erweitert werden [ZHOU/SALOMON/WU '99].
- Passivitätserhaltend für symmetrische, passive Systeme.
- **Berechenbare Fehlerabschätzung** als Nebenprodukt der Berechnung:

$$\|y - y^{\text{BT}}\|_2 \leq 2 \sum_{j=r+1}^n \sigma_j^{\text{BT}} \|u\|_2,$$

# Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

- Wahl anderer Gramscher Matrizen liefert weitere Verfahren, die für spezielle Anforderungen (z.B. Minimalphasigkeit, Passivität) geeignet sind.
- Anwendung auf Systeme mit Massematrix ( $E\dot{x} = Ax + Bu$ ) möglich, ohne  $E^{-1}A$ ,  $E^{-1}B$  zu bilden!  
Varianten für  $E$  singulär existieren.
- Anwendung auf Systeme 2. Ordnung (mechanische Systeme) entweder durch Linearisierung und Anwendung auf resultierendes LTI System oder direkt auf Systeme 2. Ordnung ( $\rightsquigarrow$  später).
- Klassische Implementierungen kosten  $\mathcal{O}(n^3)$  Rechenoperationen und benötigen  $\mathcal{O}(n^2)$  Speicher  $\rightsquigarrow$  viel zu teuer für große Probleme mit  $n \gg 1000$ , insbesondere für strukturdynamische FEM-Modelle!

# Modellreduktion basierend auf balanciertem Abschneiden

- Wahl anderer Gramscher Matrizen liefert weitere Verfahren, die für spezielle Anforderungen (z.B. Minimalphasigkeit, Passivität) geeignet sind.
- Anwendung auf Systeme mit Massematrix ( $E\dot{x} = Ax + Bu$ ) möglich, ohne  $E^{-1}A$ ,  $E^{-1}B$  zu bilden!

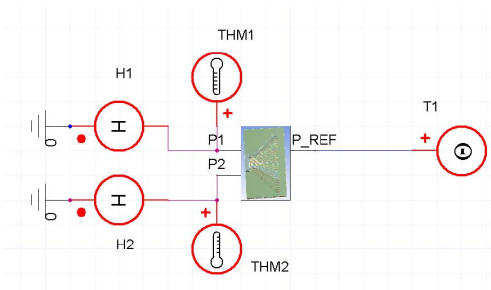
Varianten für  $E$  singulär existieren.

- Anwendung auf Systeme 2. Ordnung (mechanische Systeme) entweder durch Linearisierung und Anwendung auf resultierendes LTI System oder direkt auf Systeme 2. Ordnung ( $\rightsquigarrow$  später).
- Klassische Implementierungen kosten  $\mathcal{O}(n^3)$  Rechenoperationen und benötigen  $\mathcal{O}(n^2)$  Speicher  $\rightsquigarrow$  viel zu teuer für große Probleme mit  $n \gg 1000$ , insbesondere für strukturdynamische FEM-Modelle!
- Seit ca. 10 Jahren Entwicklungen in der Numerischen Linearen Algebra, die es durch Strukturausnutzung der FEM Matrizen erlauben, sehr große Lyapunovgleichungen zu lösen.  
 $n = 1.000.000$  heutzutage in MATLAB möglich!  
 Rechenzeit  $< 1h$  auf quadcore Compute-Server.

# Numerische Beispiele

## Elektro-thermische Simulation einer integrierten Schaltung [Quelle: Evgenii Rudnyi, CADFEM GmbH]

- Testschaltung in Simplorer mit 2 Transistoren.
- Konservatives thermisches Teilsystem in Simplorer:  
Spannung  $\rightsquigarrow$  Temperatur, Stromstärke  $\rightsquigarrow$  Wärmefluss.
- Originalmodell:  $n = 270.593$ ,  $m = p = 2 \Rightarrow$   
Rechenzeiten (CMESS auf Intel Xeon dualcore 3GHz, 1 Thread):
  - Lösung der Lyapunovgleichungen:  $\approx 22min$ .
  - Berechnung der red. Modelle: 44sec. ( $r = 20$ ) bis 49sec. ( $r = 70$ ).
  - Bode-Diagramm (MATLAB auf Intel Core i7, 2,67GHz, 12GB):  
mit Originalsystem 7,5h, mit reduziertem System  $< 1min$ .

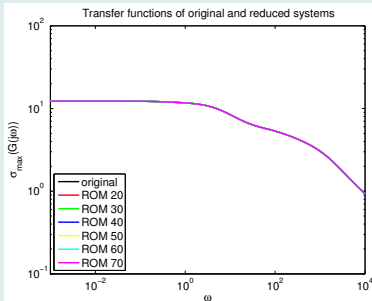


# Numerische Beispiele

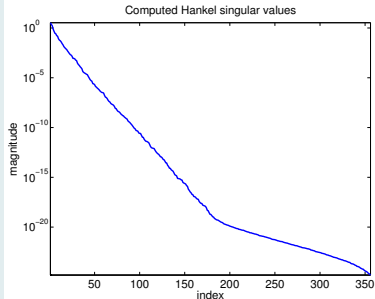
## Elektro-thermische Simulation einer integrierten Schaltung [Quelle: Evgenii Rudnyi, CADFEM GmbH]

- Originalmodell:  $n = 270.593$ ,  $m = p = 2 \Rightarrow$   
Rechenzeiten (CMESS auf Intel Xeon dualcore 3GHz, 1 Thread):
  - Lösung der Lyapunovgleichungen:  $\approx 22min$ .
  - Berechnung der red. Modelle: 44sec. ( $r = 20$ ) bis 49sec. ( $r = 70$ ).
  - Bode-Diagramm (MATLAB auf Intel Core i7, 2,67GHz, 12GB):  
mit Originalsystem 7,5h, mit reduziertem System  $< 1min$ .

### Bode-Diagramm (Amplitude)



### Hankel-Singulärwerte

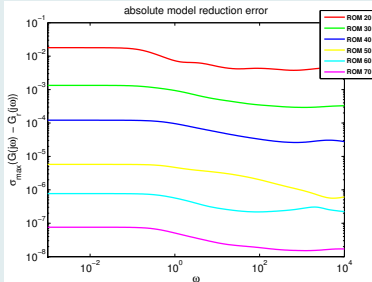


# Numerische Beispiele

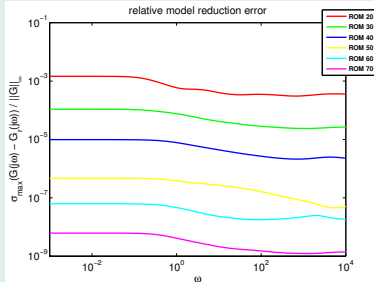
## Elektro-thermische Simulation einer integrierten Schaltung [Quelle: Evgenii Rudnyi, CADFEM GmbH]

- Originalmodell:  $n = 270.593$ ,  $m = p = 2 \Rightarrow$   
Rechenzeiten (CMESS auf Intel Xeon dualcore 3GHz, 1 Thread):
  - Lösung der Lyapunovgleichungen:  $\approx 22min$ .
  - Berechnung der red. Modelle: 44sec. ( $r = 20$ ) bis 49sec. ( $r = 70$ ).
  - Bode-Diagramm (MATLAB auf Intel Core i7, 2,67GHz, 12GB):  
mit Originalsystem 7,5h, mit reduziertem System  $< 1min$ .

### Absolute Fehler



### Relative Fehler

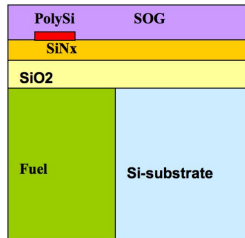
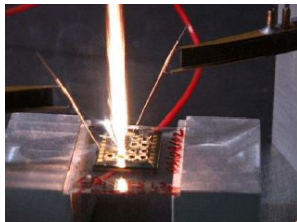




# Numerische Beispiele

## MEMS: Mikroschubdüse

- Systemintegration fester Brennstoffe und Mikromaschine auf Siliziumbasis.
- Ziel: Zünden einzelner Brennstoffzellen durch elektrischen Impuls.
- Anwendung: Nanosatelliten.
- Thermo-dynamisches Modell, FEM Diskretisierung des thermo-dynamischen Modells  $\rightsquigarrow$  LTI System mit  $m = 1$ ,  $p = 7$ .



Quelle: The Oberwolfach Benchmark Collection <http://www.intek.de/simulation/benchmark>

Dank an C. Rossi, LAAS-CNRS/EU Projekt "Micropyros".

# Numerische Beispiele

## MEMS: Mikroschubdüse

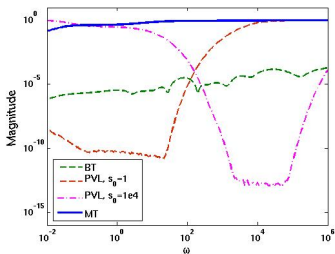
- Axialsymmetrisches 2D Modell.
- FEM mit linearen (quadratischen) Elementen  $\rightsquigarrow n = 4,257(11,445)$ ,  
 $m = 1, p = 7$ .

# Numerische Beispiele

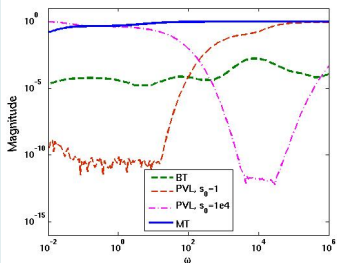
## MEMS: Mikroschubdüse

- Axialsymmetrisches 2D Modell.
- FEM mit linearen (quadratischen) Elementen  $\rightsquigarrow n = 4, 257$  (11, 445),  
 $m = 1$ ,  $p = 7$ .
- Vergleiche reduzierte Modelle berechnet mit BT und Krylovraumverfahren (PVL), Dimension jeweils  $r = 30$  sowie modales Modell (MT) der Dimension  $r = 120$ .

Relativer Fehler für  $n = 4, 257$



Relativer Fehler für  $n = 11, 445$

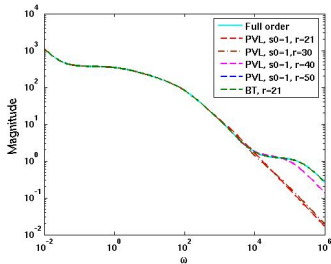


# Numerische Beispiele

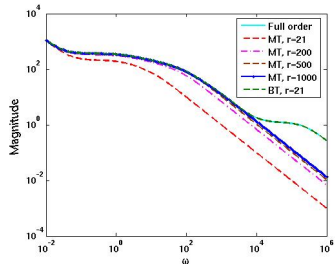
## MEMS: Mikroschubdüse

- Axialsymmetrisches 2D Modell.
- FEM mit linearen Elementen  $\rightsquigarrow n = 4,257, m = 1, p = 7$ .
- Vergleiche reduzierte Modelle berechnet mit BT ( $r = 21$ ) und Modelle wachsender Dimension für Krylovraumverfahren (PVL) bzw. modale Modelle (MT).

### Frequenzantwort BT/PVL



### Frequenzantwort BT/MT



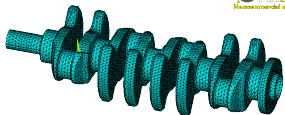
# Systeme zweiter Ordnung

## Ergebnisse einer FVV Vorstudie

FVV-Vorstudie: Moderne Modellreduktion elastischer Bauteile für die Simulation flexibler Mehrkörpersysteme

P. Benner (TU Chemnitz), P. Eberhard (U Stuttgart), G. Knoll (U Kassel)

Kurbelwelle



Regelungssystem zweiter Ordnung

$$M \ddot{q} + D \dot{q} + K q = B u$$

$$y = C q$$

Reduziertes Modell

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{q}} + \tilde{D} \dot{\tilde{q}} + \tilde{K} \tilde{q} = \tilde{B} u$$

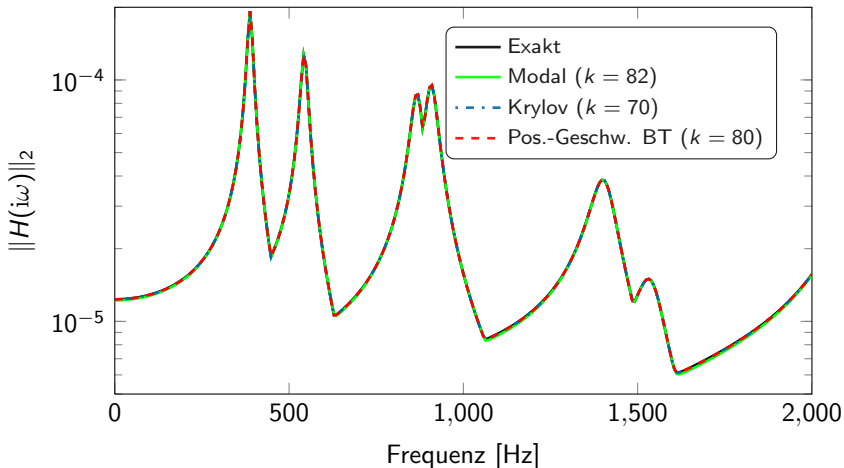
$$\tilde{y} = \tilde{C} \tilde{q}$$

Verwendete Reduktionsansätze:

- Modales Abschneiden
- Interpolation via Krylov-Unterraum-Methoden
- **Balanciertes Abschneiden**

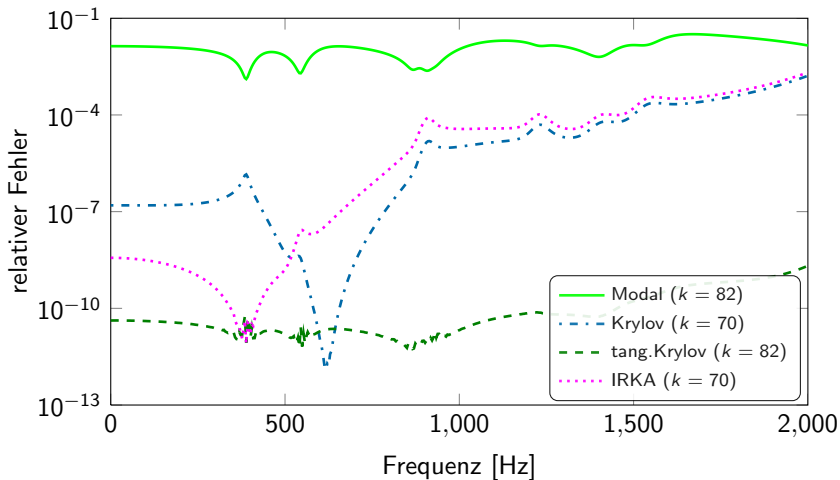
# Ergebnisse einer FVV Vorstudie

Ergebnisse für Kurbelwelle, Ordnung  $n = 46.860$ , 35 Ein-/ Ausgänge



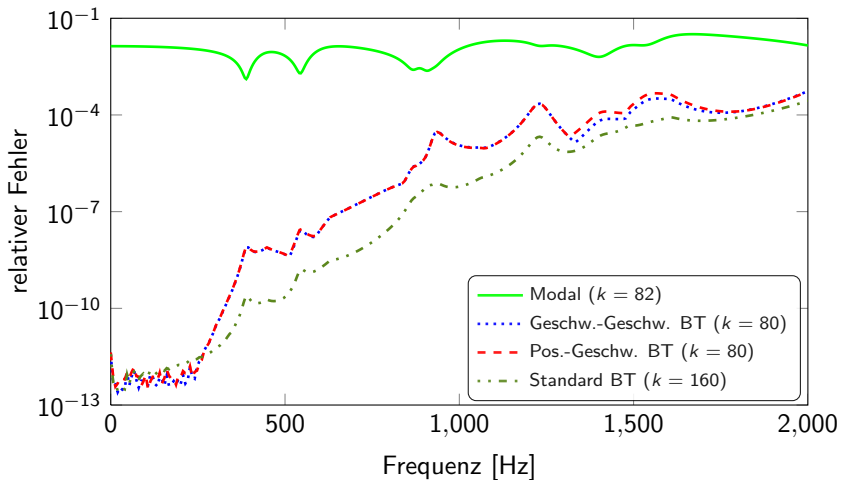
# Ergebnisse einer FVV Vorstudie

Ergebnisse für Kurbelwelle, Ordnung  $n = 46.860$ , 35 Ein-/ Ausgänge  
Modal vs. Krylov



# Ergebnisse einer FVV Vorstudie

Ergebnisse für Kurbelwelle, Ordnung  $n = 46.860$ , 35 Ein-/ Ausgänge  
Modal vs. Balanciertes Abschneiden





# Dominante Eigenwerte

## Übliche Herangehensweise bei modaler Reduktion

Berechnung der Rechts-/Linkseigenvektoren  $x_j$ ,  $y_j$  des Eigenwertproblems

$$(\lambda_j^2 M + \lambda_j D + K)x_j = 0, \quad y_j^H (\lambda_j^2 M + \lambda_j D + K) = 0$$

bezüglich der Eigenwerte  $\lambda_j$  mit den kleinsten Realteilen.

Ansatzfunktionen aus Eigenvektoren und oftmals zusätzlichen **statischen Moden**, z.B.:  $V := [x_1, \dots, x_k, K^{-1}B]$ ,  $W := [y_1, \dots, y_k, K^{-T}C^T]$ .

### Nachteile:

- Kleine Realteile allein geben keinen Aufschluss über den Einfluss von  $\lambda_j$  im Ein-/Ausgangsverhalten des Systems.
- Unnötige Zunahme der Ordnung des reduzierten Systems bei vielen Ein-/Ausgängen.

# Dominante Eigenwerte

## Alternativer Ansatz

Betrachten die Übertragungsfunktion als Partialbruchsumme

$$H(s) = C(s^2M + sK + D)^{-1}B = \sum_{j=1}^{2n} \frac{R_j}{s - \lambda_j}$$

mit Residuen  $R_j := (Cx_j)(y_j^H B)\lambda_j \in \mathbb{C}^{p \times m}$ .

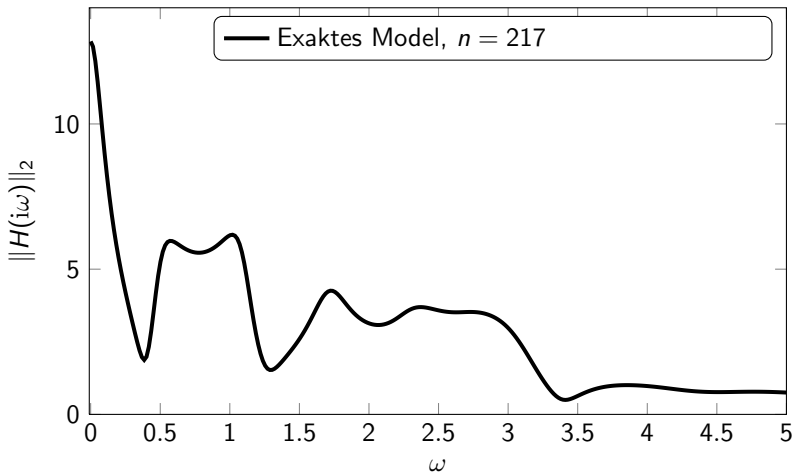
Ansatzfunktionen aus Rechts-/Linkseigenvektoren zu **dominanten Eigenwerten**, d.h.  $(\lambda_j, x_j, y_j)$  mit großen Werten von

$$\frac{\|R_j\|_2}{|\operatorname{Re}(\lambda_j)|}$$

Diese dominanten Moden haben einen entscheidenden Einfluss im Ein-/Ausgangsverhalten des Systems und verursachen Peaks im Frequenzplot.

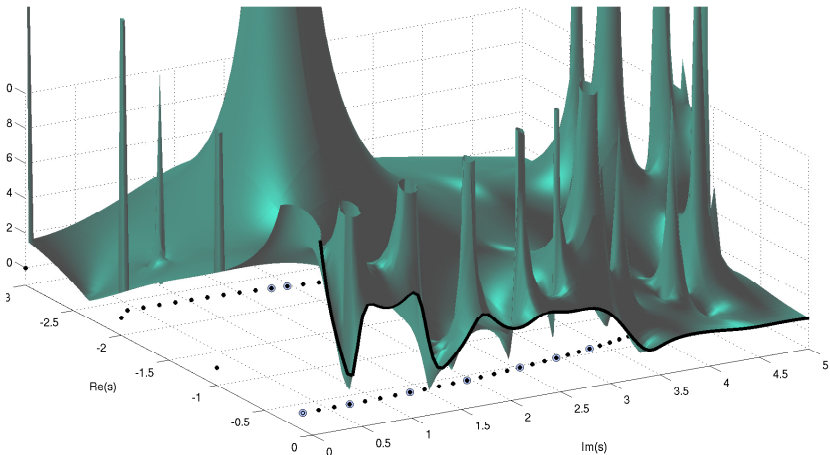
# Dominante Eigenwerte

Beispiel: System erster Ordnung mit zufälligen  $B$ ,  $C^T \in \mathbb{R}^n$ .



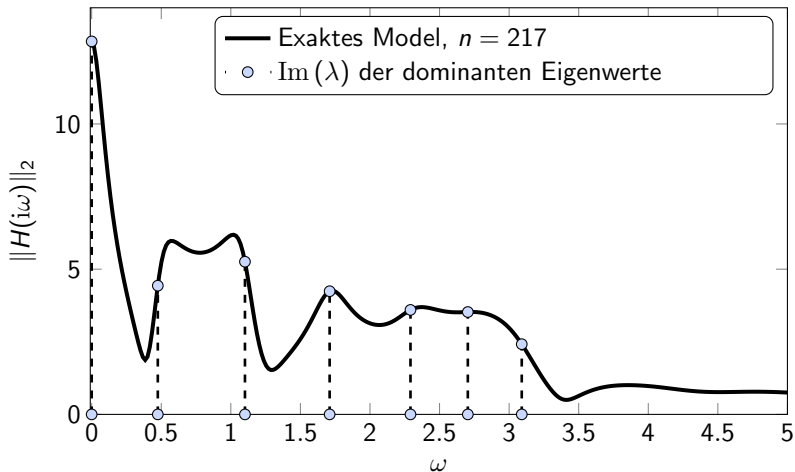
# Dominante Eigenwerte

Beispiel: System erster Ordnung mit zufälligen  $B$ ,  $C^T \in \mathbb{R}^n$ .



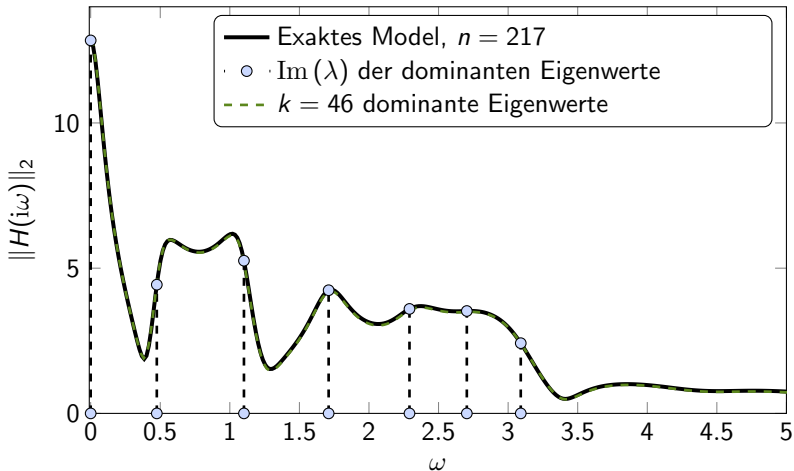
# Dominante Eigenwerte

Beispiel: System erster Ordnung mit zufälligen  $B$ ,  $C^T \in \mathbb{R}^n$ .



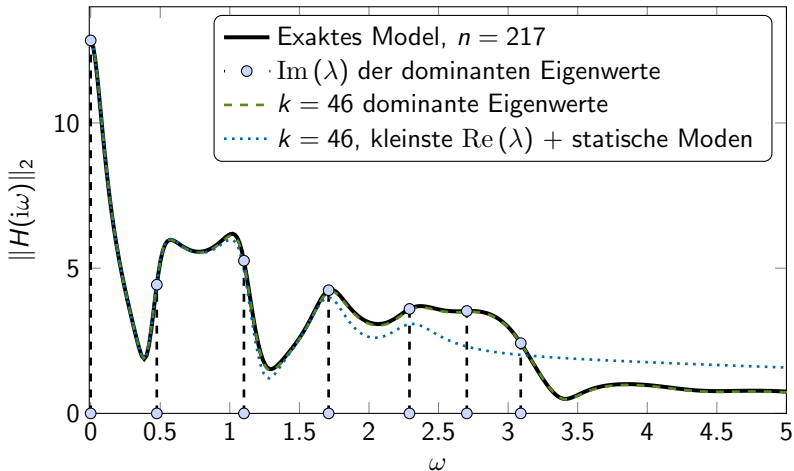
# Dominante Eigenwerte

Beispiel: System erster Ordnung mit zufälligen  $B$ ,  $C^T \in \mathbb{R}^n$ .



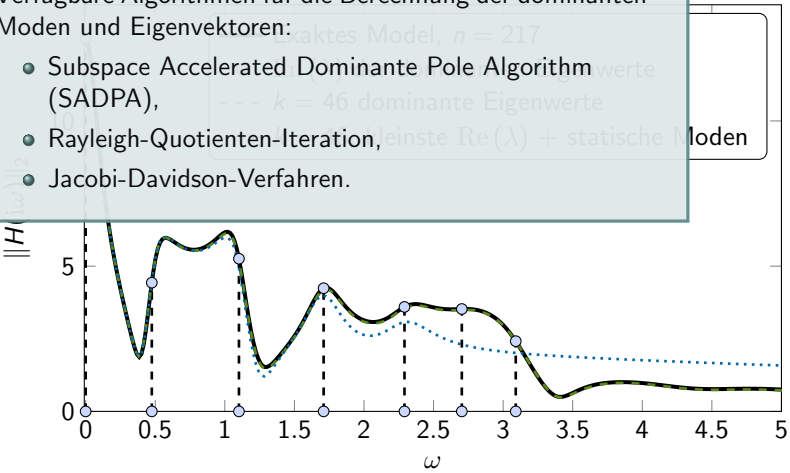
# Dominante Eigenwerte

Beispiel: System erster Ordnung mit zufälligen  $B$ ,  $C^T \in \mathbb{R}^n$ .



# Dominante Eigenwerte

Beispiel: System erster Ordnung mit zufälligen  $B, C' \in \mathbb{R}^n$ .  
 Verfügbare Algorithmen für die Berechnung der dominanten Moden und Eigenwerte:  
 • Subspace Accelerated Dominante Pole Algorithm (SADPA),  
 • Rayleigh-Quotienten-Iteration,  
 • Jacobi-Davidson-Verfahren.





# Parameter-erhaltende Modellreduktion

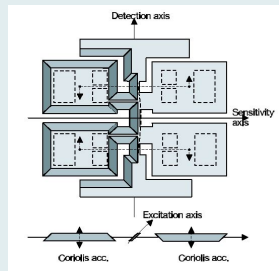
Beispiel: Designoptimierung für Mikrosysteme

## Mikrogyroskop (butterfly gyro)



- Anregung der Elektroden durch angelegte Spannung lässt Flügel vibrieren, durch Coriolis-Kraft erzeugte Rotation liefert Sensordaten.
- FE-Modell 2. Ordnung:  
 $N = 17.361 \rightsquigarrow n = 34.722, m = 1, p = 12.$
- Sensor zur Positionsbestimmung aus Beschleunigung und Drehung.

- Anwendung: Inertialnavigation (Trägheitsnavigation)



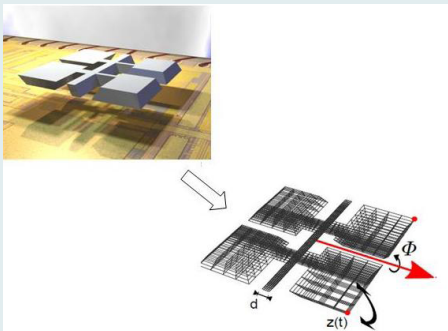
Quelle: The Oberwolfach Benchmark Collection <http://www.imtek.de/simulation/benchmark>

# Parameter-erhaltende Modellreduktion

Beispiel: Designoptimierung für Mikrosysteme

## Mikrogyroskop (butterfly gyro)

Parametrisches FE Modell:  $M(d)\ddot{x}(t) + D(\theta, \alpha, \beta)\dot{x}(t) + T(d)x(t) = Bu(t)$ .



[FENG/BENNER/KORVINK '10]

Gefördert durch DFG Projekt BE2174/7-1 *Automatic, Parameter-Preserving Model Reduction for Applications in Microsystems Technology* mit IMTEK, Freiburg.

# Parameter-erhaltende Modellreduktion

Beispiel: Designoptimierung für Mikrosysteme

## Mikrogyroskop (butterfly gyro)

Parametrisches FE Modell:

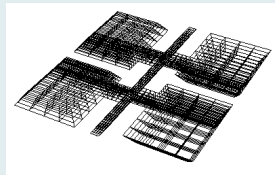
$$M(d)\ddot{x}(t) + D(\theta, \alpha, \beta)\dot{x}(t) + T(d)x(t) = Bu(t),$$

wobei

$$M(d) = M_1 + dM_2,$$

$$D(\theta, \alpha, \beta) = \theta(D_1 + dD_2) + \alpha M(d) + \beta T(d),$$

$$T(d) = T_1 + \frac{1}{d}T_2 + dT_3,$$



mit

- Breite des Trägers:  $d$ ,
- Winkelgeschwindigkeit:  $\theta$ ,
- Rayleigh Dämpfungsparameter:  $\alpha, \beta$ ,

[FENG/BENNER/KORVINK '10]

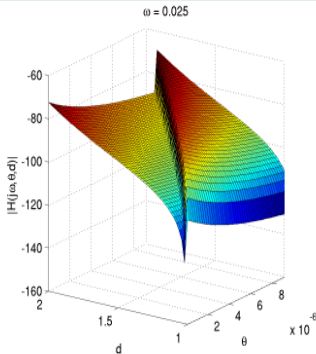
Gefördert durch DFG Projekt BE2174/7-1 *Automatic, Parameter-Preserving Model Reduction for Applications in Microsystems Technology* mit IMTEK, Freiburg.

# Parameter-erhaltende Modellreduktion

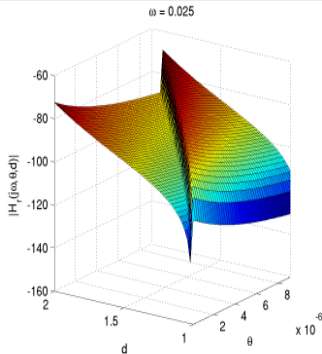
Beispiel: Designoptimierung für Mikrosysteme

## Mikrogyroskop (butterfly gyro)

Original. . .



und Fälschung (reduziertes Modell).



Gefördert durch DFG Projekt BE2174/7-1 *Automatic, Parameter-Preserving Model Reduction for Applications in Microsystems Technology* mit IMTEK, Freiburg.

# Parameter-erhaltende Modellreduktion

## Algorithmische vs. Hardware Beschleunigung

- Parameterstudien müssen den Ingenieuren auf ihren Desktopcomputern auf täglicher Basis zur Verfügung stehen.
- Im Mikrogyroskop-Beispiel konnte die Parameterstudie

*von ca 3 Tagen auf 1 Stunde*

reduziert werden mithilfe einer neuen mathematischen Methode.

*⇒ Beschleunigungsfaktor  $\approx 72$ .*

Anderes Beispiel (*Anemometer*): Reduktion von über 11 Tagen auf ca. 90sec.  
↪ 10.500fache Beschleunigung!

- Da Prozessortakt limitiert ist, benötigt eine entsprechende Beschleunigung durch *Hardware* Mehrkern-Technologie.
- Bei idealem Speed-up: Benötige  $\approx 288$  (21.000) Kerne!

# Ansätze zur nichtlinearen Modellreduktion

- Viele nichtlineare Systeme lassen sich durch quadratisch-bilineare differentiell-algebraische Gleichungen (QBDAEs) der Form

$$E\dot{x} = A_1x + A_2x \otimes x + Nxu + bu,$$

$$y = cx,$$

darstellen. (Hier:  $E, A_1, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n^2}$ ,  $b, c^T \in \mathbb{R}^n$ .)

- Kombination **quadratischer** und **bilinear**er Regelungssysteme.
- Charakterisierung des Input-Output-Verhaltens durch verallgemeinerte Übertragungsfunktionen, z.B.

$$H_1(s) = c \underbrace{(sE - A_1)^{-1} b}_{G(s)}$$

$$H_2(s_1, s_2) = \frac{1}{2} c ((s_1 + s_2) E - A_1)^{-1} [A_2(G(s_1) \otimes G(s_2) + G(s_2) \otimes G(s_1))$$

$$+ N(G(s_1) + G(s_2))]$$

# Ansätze zur nichtlinearen Modellreduktion

## Beispiel

- FitzHugh-Nagumo System: Einfaches Modell für Neuronen-(de-)aktivierung.

$$\begin{aligned}\epsilon v_t(x, t) &= \epsilon^2 v_{xx}(x, t) + f(v(x, t)) - w(x, t) + g, \\ w_t(x, t) &= hv(x, t) - \gamma w(x, t) + g,\end{aligned}$$

mit  $f(v) = v(v - 0.1)(1 - v)$  und Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned}v(x, 0) &= 0, & w(x, 0) &= 0, & x &\in [0, 1] \\ v_x(0, t) &= -i_0(t), & v_x(1, t) &= 0, & t &\geq 0,\end{aligned}$$

wobei  $\epsilon = 0.015$ ,  $h = 0.5$ ,  $\gamma = 2$ ,  $g = 0.05$ ,  $i_0(t) = 50000t^3 \exp(-15t)$

- Betrachte Parameter  $g$  als zusätzlichen Eingang.
- Dimension  $n = 2 \cdot 400$ , QBDAE Dimension  $N = 3 \cdot 400$ , reduzierte QBDAE Dimension  $r = 26$ .

[B./BREITEN 2010]

# Ansätze zur nichtlinearen Modellreduktion

## Beispiel

3d Phasenraum

[B./BREITEN 2010]



# Zusammenfassung und Ausblick

- Aktuelle Forschung:
  - Parametrische Systeme,
  - nichtlineare Systeme (z.B.  $M\ddot{x} + D\dot{x} + K(x)x = Bu$ ),
  - Systeme mit Totzeiten,
  - diskrete/stochastische Systeme.
- Bisher Anwendungen in
  - Mikrosystemtechnik und Nanoelektronik,
  - im Werkzeugmaschinenbau und der Fahrzeugtechnik,
  - Thermodynamik und CFD,
  - einige Beispiele aus der Systembiologie und Neurologie.