

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Verfahren, Implementierung, Vergleich

Martin Köhler

Diplomverteidigung

15. Dezember 2010

# Überblick



- 1 Einführung
- 2 Die  $\mathcal{H}_2$ -Norm
- 3  $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion
- 4 Spezieller Sylvesterlöser
- 5 Schlussfolgerungen und Ausblick

# Einführung



## LTI-System

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t)$$



# Einführung

## LTI-System

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t)$$

### Matrizen:

- *Systemmatrix*

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

- *Eingangsmatrix*

$$B \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

- *Ausgangsmatrix*

$$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

# Einführung

## LTI-System

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t)$$

Matrizen:

- Systemmatrix

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

- Eingangsmatrix

$$B \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

- Ausgangsmatrix

$$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

Für  $p = m = 1$  Single-Input  
Single-Output (SISO) System

# Einführung



## LTI-System

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t)$$

### Matrizen:

- **Systemmatrix**  
 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
- **Eingangsmatrix**  
 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,
- **Ausgangsmatrix**  
 $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

Für  $p = m = 1$  Single-Input  
Single-Output (SISO) System

## Anwendungen

Entwicklung von ICs

Schwingungsanalyse von me-  
chanischen Systemen

Physikalische Prozesse

Ortsdiskretisierte PDEs

...

# Einführung

## Problemstellung der Modellreduktion

### großes LTI-System

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t)$$

### Probleme

- Moderne Anwendungen führen zu Systemen in der Größenordnung  $> 10^4$
- Effiziente Simulation ist nicht möglich

# Einführung

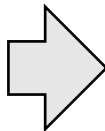
## Problemstellung der Modellreduktion



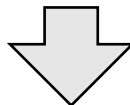
### großes LTI-System

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t)$$



Modell-  
reduktion



### Lösung

Projektion auf reduzierten Unter-  
raum mit  $A_r = W^T A V$ ,  
 $B_r = W^T B$  und  $C_r = C V$ .

Entscheidend ist die Wahl  
von  $\mathcal{W} = \text{span}(W)$  und  
 $\mathcal{V} = \text{span}(V)$  mit  $W^T V = I$ .

### reduziertes Modell

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t)$$





# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Die Übertragungsfunktion

### Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgang

Um ein nutzbares reduziertes Modell zu erhalten, ist ein nahezu gleiches Ein-Ausgangsverhalten notwendig. Die Bewertung wird durch den Übergang vom Orts- in den Frequenzbereich ermöglicht.



# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Die Übertragungsfunktion

### Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgang

Um ein nutzbares reduziertes Modell zu erhalten, ist ein nahezu gleiches Ein-Ausgangsverhalten notwendig. Die Bewertung wird durch den Übergang vom Orts- in den Frequenzbereich ermöglicht.

Wenden wir die *Laplace*-Transformation auf das System

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

an, so erhalten wir die Übertragungsfunktion

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$



# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Die Übertragungsfunktion

### Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgang

Um ein nutzbares reduziertes Modell zu erhalten, ist ein nahezu gleiches Ein-Ausgangsverhalten notwendig. Die Bewertung wird durch den Übergang vom Orts- in den Frequenzbereich ermöglicht.

Wenden wir die *Laplace*-Transformation auf das System

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

an, so erhalten wir die Übertragungsfunktion

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

→ SISO-Fall: komplexe rationale Funktion



# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Die Übertragungsfunktion

### Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgang

Um ein nutzbares reduziertes Modell zu erhalten, ist ein nahezu gleiches Ein-Ausgangsverhalten notwendig. Die Bewertung wird durch den Übergang vom Orts- in den Frequenzbereich ermöglicht.

Wenden wir die *Laplace*-Transformation auf das System

$$\Sigma : \begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

an, so erhalten wir die Übertragungsfunktion

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B.$$

→ SISO-Fall: komplexe rationale Funktion

# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Einordnung in einen Funktionenraum



→ Um später die Differenz zweier Übertragungsfunktionen im Mittel bewerten zu können, ist ein Funktionenraum mit 2-Norm zu suchen.



# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Einordnung in einen Funktionenraum

→ Um später die Differenz zweier Übertragungsfunktionen im Mittel bewerten zu können, ist ein Funktionenraum mit 2-Norm zu suchen.

### Definition (Hardy-Raum $\mathcal{H}_2$ )

Sei  $\mathcal{H}_2$  der Hilbertraum aller Funktionen  $g(z)$ , die analytisch für alle  $z \in \mathbb{C}_{>0}$  sind und für jeden festen Realteil  $\operatorname{Re}(z) = x > 0$  als Funktion von  $y \in \mathbb{R}$  mit  $z = x + iy$  quadratisch integrierbar sind, das heißt

$$\sup_{x>0} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x + iy)|^2 dy < \infty.$$

Das Skalarprodukt ist definiert durch

$$\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G(i\omega)} H(i\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(-i\omega) H(i\omega) d\omega.$$

# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Alternative Berechnungsmöglichkeiten des Skalarproduktes



→ Berechnungsmöglichkeit **ohne** Integralauswertung notwendig



# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Alternative Berechnungsmöglichkeiten des Skalarproduktes

→ Berechnungsmöglichkeit **ohne** Integralauswertung notwendig

### Satz (GUGERCIN ET. AL. '08)

Seien die SISO-Übertragungsfunktionen

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b \quad \text{und} \quad H(s) = \tilde{c}^T (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{b}$$

gegeben. Dann kann das Skalarprodukt  $\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2}$  durch das Lösen der folgenden Sylvestergleichung bestimmt werden.

Ist  $P$  Lösung von  $AP + P\tilde{A}^T + b\tilde{b}^T = 0$ , dann ist  $\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} = c^T P \tilde{c}$ .





# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Alternative Berechnungsmöglichkeiten des Skalarproduktes

→ Berechnungsmöglichkeit **ohne** Integralauswertung notwendig

### Satz (GUGERCIN ET. AL. '08)

Seien die SISO-Übertragungsfunktionen

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b \quad \text{und} \quad H(s) = \tilde{c}^T (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{b}$$

gegeben. Dann kann das Skalarprodukt  $\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2}$  durch das Lösen der folgenden Sylvestergleichung bestimmt werden.

Ist  $P$  Lösung von  $AP + P\tilde{A}^T + b\tilde{b}^T = 0$ , dann ist  $\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} = c^T P\tilde{c}$ .

→  $\mathcal{H}_2$ -Norm von  $G(s) = C^T (sI - A)^{-1} B$  mit

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = c^T P c$$

berechenbar.



# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Alternative Berechnungsmöglichkeiten des Skalarproduktes

→ Berechnungsmöglichkeit **ohne** Integralauswertung notwendig

### Satz (K. '10)

Seien die SISO-Übertragungsfunktionen

$$G(s) = c^T (sE - A)^{-1} b \quad \text{und} \quad H(s) = \tilde{c}^T (s\tilde{E} - \tilde{A})^{-1} \tilde{b}$$

gegeben. Dann kann das Skalarprodukt  $\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2}$  durch das Lösen der folgenden Sylvestergleichung bestimmt werden.

Ist  $P$  Lösung von  $AP\tilde{E}^T + EP\tilde{A}^T + b\tilde{b}^T = 0$ , dann ist  $\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} = c^T P\tilde{c}$ .

→  $\mathcal{H}_2$ -Norm von  $G(s) = C^T (sI - A)^{-1} B$  mit

$$AP E^T + EP A^T + BB^T = 0, \quad \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = c^T P c$$

berechenbar.



# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

Alternative Berechnungsmöglichkeiten des Skalarproduktes

→ Berechnungsmöglichkeit **ohne** Integralauswertung notwendig

## Satz (GUGERCIN ET. AL. '08)

Seien die SISO-Übertragungsfunktionen

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b \quad \text{und} \quad H(s) = \tilde{c}^T (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{b}$$

gegeben. Dann kann das Skalarprodukt  $\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2}$  durch das Lösen der folgenden Sylvester-Gleichung bestimmt werden.

Ist  $P$  Lösung von  $AP + PA^T + BB^T = 0$ , dann ist  $\langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} = c^T P \tilde{c}$ .

Berechnung mit

- Bartels-Stewart-Algorithmus  
BARTELS, STEWART '72
- ADI-Verfahren  
PENZL '98, SAAK '09

→  $\mathcal{H}_2$ -Norm von  $G(s) = C^T (sI - A)^{-1} B$  mit

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = c^T P c$$

berechenbar.



# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Abstand zwischen zweier Übertragungsfunktionen

- ① Rückführung auf ein Abstandssystem:

$$\begin{aligned}
 G(s) - H(s) &= c^T (sl - A)^{-1} b - \tilde{c}^T (sl - \tilde{A})^{-1} \tilde{b} \\
 &= \underbrace{(c^T \quad -\tilde{c}^T)}_{\hat{c}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} (sl - A)^{-1} & 0 \\ 0 & (sl - \tilde{A})^{-1} \end{pmatrix}}_{(sl - \hat{A})^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} b^T \\ \tilde{b}^T \end{pmatrix}}_{\hat{b}}
 \end{aligned}$$

# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Abstand zwischen zweier Übertragungsfunktionen

- 1 Rückführung auf ein Abstandssystem:

$$\begin{aligned}
 G(s) - H(s) &= c^T (sl - A)^{-1} b - \tilde{c}^T (sl - \tilde{A})^{-1} \tilde{b} \\
 &= \underbrace{(c^T \quad -\tilde{c}^T)}_{\hat{c}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} (sl - A)^{-1} & 0 \\ 0 & (sl - \tilde{A})^{-1} \end{pmatrix}}_{(sl - \hat{A})^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} b^T \\ \tilde{b}^T \end{pmatrix}}_{\hat{b}}
 \end{aligned}$$

- 2 Ausnutzen der Residuenformulierung:

$$\begin{aligned}
 \|G - H\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \langle G - H, G - H \rangle_{\mathcal{H}_2} = \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 - 2 \langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} + \|H\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n \rho_k^G (G(-\lambda_k) - H(-\lambda_k)) - \sum_{k=1}^m \rho_k^H (G(-\mu_k) - H(-\mu_k))
 \end{aligned}$$

mit  $\rho_k^G = \text{res}(G(s), \lambda_k)$  und  $\rho_k^H = \text{res}(H(s), \mu_k)$ .

# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Abstand zwischen zweier Übertragungsfunktionen

- 1 Rückführung auf ein Alltagsproblem: Nutzbar zur praktischen Berechnung des Fehlers

$$\begin{aligned}
 G(s) - H(s) &= c^T (sI - A)^{-1} b - \tilde{c}^T (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{b} \\
 &= \underbrace{(c^T \quad -\tilde{c}^T)}_{\hat{c}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} (sI - A)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - \tilde{A})^{-1} \end{pmatrix}}_{(sI - \hat{A})^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} b^T \\ \tilde{b}^T \end{pmatrix}}_{\hat{b}}
 \end{aligned}$$

- 2 Ausnutzen der Residuenformulierung:

$$\begin{aligned}
 \|G - H\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \langle G - H, G - H \rangle_{\mathcal{H}_2} = \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 - 2 \langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} + \|H\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n \rho_k^G (G(-\lambda_k) - H(-\lambda_k)) - \sum_{k=1}^m \rho_k^H (G(-\mu_k) - H(-\mu_k))
 \end{aligned}$$

mit  $\rho_k^G = \text{res}(G(s), \lambda_k)$  und  $\rho_k^H = \text{res}(H(s), \mu_k)$ .

# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Abstand zwischen zweier Übertragungsfunktionen

- 1 Rückführung auf ein Alltagsproblem: Nutzbar zur praktischen Berechnung des Fehlers

$$\begin{aligned}
 G(s) - H(s) &= c^T (sI - A)^{-1} b - \tilde{c}^T (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{b} \\
 &= \underbrace{(c^T \quad -\tilde{c}^T)}_{\hat{c}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} (sI - A)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - \tilde{A})^{-1} \end{pmatrix}}_{(sI - \hat{A})^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} b^T \\ \tilde{b}^T \end{pmatrix}}_{\hat{b}}
 \end{aligned}$$

- 2 Ausnutzen der Residuenformulierung:

$$\begin{aligned}
 \|G - H\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \langle G - H, G - H \rangle_{\mathcal{H}_2} = \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 - 2 \langle G, H \rangle_{\mathcal{H}_2} + \|H\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n \rho_k^G (G(-\lambda_k) - H(-\lambda_k)) - \sum_{k=1}^m \rho_k^H (G(-\mu_k) - H(-\mu_k))
 \end{aligned}$$

mit  $\rho_k^G = \text{re}$  Nützlich in der Herleitung des Modellreduktionsverfahrens



# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Numerische Ergebnisse

Berechnung der  $\mathcal{H}_2$ -Norm mit dem Bartel-Stewart-Algorithmus und dem ADI-Verfahren.

Heuristik für den Abbruch des ADI-Verfahrens:

- 16 Parameter
- 250 Iterationsschritte
- 2-Norm Residuum  $< u \cdot n$
- Änderung im 2-Norm Residuum  $< u \cdot \sqrt{n}$
- Frobenius-Norm Kriterium  $< u \cdot \sqrt{n}$





# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Numerische Ergebnisse

Berechnung der  $\mathcal{H}_2$ -Norm mit dem Bartel-Stewart-Algorithmus und dem ADI-Verfahren.

Heuristik für den Abbruch des ADI-Verfahrens:

- 16 Parameter
- 250 Iterationsschritte
- 2-Norm Residuum  $< u \cdot n$
- Änderung im 2-Norm Residuum  $< u \cdot \sqrt{n}$
- Frobenius-Norm Kriterium  $< u \cdot \sqrt{n}$

Problem	absoluter Fehler	relativer Fehler	$u \cdot n$	$\ B\ _2$
FDM-Heat 625	3.5527e-14	1.2787e-14	1.3877e-13	50.0
2 500	3.0144e-12	2.2212e-13	5.5511e-13	250.0
10 000	5.3518e-11	1.0598e-12	2.2204e-12	1000.0
Künstlich	1.1663e-11	3.7177e-13	9.0594e-14	408.0

**Tabelle:** Normunterschied bei der Berechnung mittels dicht- und dünnbesetzter Verfahren

# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Numerische Ergebnisse



Problem/ Dimension	MATLAB <sup>®</sup> dense	MATLAB sparse	C.M.E.S.S. dense	C.M.E.S.S. sparse
FDM-Heat 625	0.59	0.13	0.89	0.02
2 500	20.00	0.46	56.19	0.05
10 000	1 008.40	2.50	4 948.89	0.28
40 000	-	9.75	-	2.12
90 000	-	31.74	-	9.36
160 000	-	69.65	-	29.72
250 000	-	138.69	-	56.02
562 500	-	395.43	-	186.36
1 000 000	-	881.52	-	1 714.48
Künstlich reell	0.04	-	0.07	-
komplex	-	0.42	-	0.07

**Tabelle:** Laufzeit der  $\mathcal{H}_2$ -Norm Berechnung für 2D Wärmeleitung (FDM) und das künstliche Problem.



# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Numerische Ergebnisse

Problem/ Dimension	MATLAB <sup>®</sup> dense	MATLAB sparse	C.M.E.S.S. dense	C.M.E.S.S. sparse
FDM-Heat 625	0.59	0.13	0.89	0.02
2 500	20.00	0.46	56.19	0.05
10 000	1 008.40	2.50	4 948.89	0.28
40 000	-	9.75	-	2.12
90 000	-	21.74	-	9.36
160 000	-	-	-	29.72
250 000	-	-	-	56.02
562 500	-	395.43	-	186.36
1 000 000	-	881.52	-	1 714.48
Künstlich reell	0.04	-	0.07	-
komplex	-	0.42	-	0.07

Unterschiede zwischen den eingesetzten BLAS Bibliotheken

**Tabelle:** Laufzeit der  $\mathcal{H}_2$ -Norm Berechnung für 2D Wärmeleitung (FDM) und das künstliche Problem.



# Die $\mathcal{H}_2$ -Norm

## Numerische Ergebnisse

Problem/ Dimension	MATLAB <sup>®</sup> dense	MATLAB sparse	C.M.E.S.S. dense	C.M.E.S.S. sparse
FDM-Heat 625	0.59	0.13	0.89	0.02
2 500	20.00	0.46	56.19	0.05
10 000	1 008.40	2.50	4 948.89	0.28
40 000	-	9.75	-	2.12
90 000	-	21.74	-	9.36
160 000	-	-	-	29.72
250 000	-	-	-	56.02
562 500	-	395.43	-	186.36
1 000 000	-	881.52	-	1 714.48
Künstlich	0.04	0.42	0.07	-
	-	-	-	0.07

Unterschiede zwischen den eingesetzten BLAS Bibliotheken

- Vorausberechnung der 16 Löser benötigt mehr als 12GB RAM

- bei 12 Parametern: nur 9GB RAM, 504 Sekunden.

Tabell: Laufzeit der  $\mathcal{H}_2$ -Norm Berechnung für 2D Wärmeleitung (FDM) und das künstliche Modell

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion



## Problemstellung

Gegeben sei ein LTI-System  $\Sigma$  der Dimension  $n$  mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Gesucht ist ein reduziertes Modell  $\Sigma_r$  der Dimension  $n_r \ll n$  und der Übertragungsfunktion

$$H_r(s) = C_r(sI - A_r)^{-1}B_r,$$

welche die Eigenschaft

$$\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2} < \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \min \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}$$

zu einem gegebenen  $\varepsilon$  bzw.  $n_r$  erfüllt.

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Interpolationsansatz



→ Übertragungsfunktion eines LTI-Systems ist rationale Funktion

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Interpolationsansatz



- Übertragungsfunktion eines LTI-Systems ist rationale Funktion
- $H_r$  soll  $H$  möglichst gut interpolieren.  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  sind entsprechend zu konstruieren.



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Interpolationsansatz

→ Übertragungsfunktion eines LTI-Systems ist rationale Funktion  
→  $H_r$  soll  $H$  möglichst gut interpolieren.  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  sind entsprechend zu konstruieren.

### Satz (GRIMME '97, GUGERCIN ET. AL. '08)

*Gegeben sei ein SISO LTI-System  $\Sigma$ , ein Punkt  $\sigma \in \mathbb{C}$  mit  $\sigma \notin \Lambda(A)$  und  $\sigma \notin \Lambda(A_r)$  und ein reduziertes Modell  $\Sigma_r$ , welches durch Projektion in  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  aus  $\Sigma$  entsteht. Dann gelten folgende Aussagen:*

- 1 Ist  $(\sigma I - A)^{-1}B \in \mathcal{V}$ , so gilt  $H(\sigma) = H_r(\sigma)$ .
- 2 Ist  $(\bar{\sigma}I - A)^{-T}C^T \in \mathcal{W}$ , so gilt  $H(\sigma) = H_r(\sigma)$ .
- 3 Ist  $(\sigma I - A)^{-1}B \in \mathcal{V}$  und  $(\bar{\sigma}I - A)^{-T}C^T \in \mathcal{W}$ , so gilt  $H(\sigma) = H_r(\sigma)$  und  $H'(\sigma) = H'_r(\sigma)$ .





# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Interpolationsansatz

→ Übertragungsfunktion eines LTI-Systems ist rationale Funktion  
 →  $H_r$  soll  $H$  möglichst gut interpolieren.  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  sind entsprechend zu konstruieren.

### Satz (K. '10)

Gegeben sei ein SISO LTI-System  $\Sigma$ , ein Punkt  $\sigma \in \mathbb{C}$  mit  $\sigma \notin \Lambda(A)$  und  $\sigma \notin \Lambda(A_r)$  und ein reduziertes Modell  $\Sigma_r$ , welches durch Projektion in  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  aus  $\Sigma$  entsteht. Dann gelten folgende Aussagen:

- ① Ist  $(\sigma E - A)^{-1}B \in \mathcal{V}$ , so gilt  $H(\sigma) = H_r(\sigma)$ .
- ② Ist  $(\bar{\sigma} E - A)^{-T}C^T \in \mathcal{W}$ , so gilt  $H(\sigma) = H_r(\sigma)$ .
- ③ Ist  $(\sigma E - A)^{-1}B \in \mathcal{V}$  und  $(\bar{\sigma} E - A)^{-T}C^T \in \mathcal{W}$ , so gilt  $H(\sigma) = H_r(\sigma)$  und  $H'(\sigma) = H'_r(\sigma)$ .

Der Interpolationsansatz ist problemlos auf verallgemeinerte Systeme zu übertragen.



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Interpolationsansatz

- Übertragungsfunktion eines LTI-Systems ist rationale Funktion
- $H_r$  soll  $H$  möglichst gut interpolieren.  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  sind entsprechend zu konstruieren.

### Satz (K. '10)

Gegeben sei ein SISO LTI-System  $\Sigma$ , ein Punkt  $\sigma \in \mathbb{C}$  mit  $\sigma \notin \Lambda(A)$  und  $\sigma \notin \Lambda(A_r)$  und ein reduziertes Modell  $\Sigma_r$ , welches durch Projektion in  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  entsteht. Dann gelten folgende Aussagen:

- 1 Ist  $\sigma \in \mathcal{V}$ , so gilt  $H(\sigma) = H_r(\sigma)$ .
- 2 Ist  $\sigma \in \mathcal{W}$ , so gilt  $H(\sigma) = H_r(\sigma)$ .
- 3 Ist  $(\sigma E - A)^{-1}B \in \mathcal{V}$  und  $(\sigma E - A)^{-1}C^T \in \mathcal{W}$ , so gilt  $H(\sigma) = H_r(\sigma)$  und  $H'(\sigma) = H'_r(\sigma)$ .

Der Interpolationsansatz ist problemlos auf verallgemeinerte Systeme zu übertragen.

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Optimalitätskriterien



→  $\mathcal{H}_2$  ist ein Hilbertraum, somit klassische Bestapproximationsresultate nutzbar, aber:

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Optimalitätskriterien



→  $\mathcal{H}_2$  ist ein Hilbertraum, somit klassische Bestapproximationsresultate nutzbar, aber:

- Einschränkungen, zum Beispiel festgelegte Polstellenmenge

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Optimalitätskriterien



→  $\mathcal{H}_2$  ist ein Hilbertraum, somit klassische Bestapproximationsresultate nutzbar, aber:

- Einschränkungen, zum Beispiel festgelegte Polstellenmenge
- Auswertung der Skalarprodukte ist zu teuer

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Optimalitätskriterien



→  $\mathcal{H}_2$  ist ein Hilbertraum, somit klassische Bestapproximationsresultate nutzbar, aber:

- Einschränkungen, zum Beispiel festgelegte Polstellenmenge
- Auswertung der Skalarprodukte ist zu teuer
- passende Basiselemente für die reduzierte Übertragungsfunktion nicht bekannt



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Optimalitätskriterien

→  $\mathcal{H}_2$  ist ein Hilbertraum, somit klassische Bestapproximationsresultate nutzbar, aber:

- Einschränkungen, zum Beispiel festgelegte Polstellenmenge
- Auswertung der Skalarprodukte ist zu teuer
- passende Basiselemente für die reduzierte Übertragungsfunktion nicht bekannt

Abschwächung des Minimabegriffs: *lokal minimal*:

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|H - \tilde{H}_r^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall \|H_r - \tilde{H}_r^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\varepsilon$$



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Optimalitätskriterien

→  $\mathcal{H}_2$  ist ein Hilbertraum, somit klassische Bestapproximationsresultate nutzbar, aber:

- Einschränkungen, zum Beispiel festgelegte Polstellenmenge
- Auswertung der Skalarprodukte ist zu teuer
- passende Basiselemente für die reduzierte Übertragungsfunktion nicht bekannt

Abschwächung des Minimabegriffs: *lokal minimal*:

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|H - \tilde{H}_r^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall \|H_r - \tilde{H}_r^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\varepsilon$$

Neues Bestapproximationsresultat: Für lokal minimales  $H_r$  gilt

$$\langle H - H_r, H_r \cdot G_1 + G_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} = 0$$

für alle reellen  $G_{1,2}$  mit gleichen Polstellen wie  $H_r$ .





# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Optimalitätskriterien

→  $\mathcal{H}_2$  ist ein Hilbertraum, somit klassische Bestapproximationsresultate nutzbar, aber:

- Einschränkungen, zum Beispiel festgelegte Polstellenmenge
- Auswertung der Skalarprodukte ist zu teuer
- passende Basiselemente für die reduzierte Übertragungsfunktion nicht bekannt

Abschwächung des Minimabegriffs: *lokal minimal*:

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|H - \tilde{H}_r^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall \|H_r - \tilde{H}_r^\varepsilon\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\varepsilon$$

Für lokal minimale  $H_r$  folgt aus  $\langle H - H_r, H_r \cdot G_1 + G_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} = 0$ , dass

$$H(-\mu_i) = H_r(-\mu_i) \quad \text{und} \quad H'(-\mu_i) = H_r'(-\mu_i)$$

an allen Polstellen  $\mu_i$  von  $H_r$  gilt.

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das IRKA-Verfahren



**Grundidee:** Starte mit einer beliebigen Parametermenge  $\mu$  und betrachte deren Veränderung. [GUGERCIN '08]

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das IRKA-Verfahren



**Grundidee:** Starte mit einer beliebigen Parametermenge  $\mu$  und betrachte deren Veränderung. [GUGERCIN '08]

→ Bestimmung von  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  zu einer gegebenen Menge von Interpolationspunkten möglich.



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das IRKA-Verfahren

**Grundidee:** Starte mit einer beliebigen Parametermenge  $\mu$  und betrachte deren Veränderung. [GUGERCIN '08]

- Bestimmung von  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  zu einer gegebenen Menge von Interpolationspunkten möglich.
- Die Funktion  $\lambda(\mu)$  bildet die Parametermenge auf die erhaltenen Polstellen ab.
- Eine gute Parametermenge ist erzielt, wenn  $\lambda(\mu)$  genau das Spiegelbild von  $\mu$  ist.



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das IRKA-Verfahren

**Grundidee:** Starte mit einer beliebigen Parametermenge  $\mu$  und betrachte deren Veränderung. [GUGERCIN '08]

- Bestimmung von  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  zu einer gegebenen Menge von Interpolationspunkten möglich.
- Die Funktion  $\lambda(\mu)$  bildet die Parametermenge auf die erhaltenen Polstellen ab.
- Eine gute Parametermenge ist erzielt, wenn  $\lambda(\mu)$  genau das Spiegelbild von  $\mu$  ist.
- Wir suchen daher eine Nullstelle von

$$f(\mu) = \lambda(\mu) + \mu.$$

Mit einem Newtonansatz erhalten wir

$$\mu^{(n+1)} = \mu^{(n)} - (I - J^{(\lambda)})^{-1}(\lambda(\mu^{(n)}) + \mu^{(n)}),$$

mit  $J_{ij}^{(\lambda)} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mu_j}$ .

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das IRKA-Verfahren



**Grundidee:** Starte mit einer beliebigen Parametermenge  $\mu$  und betrachte deren Veränderung. [GUGERCIN '08]

- Bestimmung von  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  zu einer gegebenen Menge von Interpolationspunkten möglich.
- Die Funktion  $\lambda(\mu)$  bildet die Parametermenge auf die erhaltenen Polstellen ab.
- Eine gute Parametermenge ist erzielt, wenn  $\lambda(\mu)$  genau das Spiegelbild von  $\mu$  ist.
- Wir suchen daher eine Nullstelle von

$$f(\mu) = \lambda(\mu) + \mu.$$

Mit einem vereinfachten Newtonansatz,  $J = 0$ , erhalten wir

$$\mu^{(n+1)} = -\lambda(\mu^{(n)}).$$



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das IRKA-Verfahren

---

### Algorithmus 1 Iterativer Rationaler Krylovinterpolationsalgorithmus

---

**Input:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b = B \in \mathbb{R}^n$ ,  $c = C^T \in \mathbb{R}^n$  und  $\mu^{(0)} = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ .

**Output:**  $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $b_r = B_r \in \mathbb{R}^r$ ,  $c_r = C_r^T \in \mathbb{R}^r$  mit lokal minimalem  $H_r$

- 1:  $k \leftarrow 0$
  - 2: Bestimme  $\mathcal{V} = \text{span}(V) = \text{span}((\mu_1 I - A)^{-1}b, \dots, (\mu_r I - A)^{-1}b)$
  - 3: Bestimme  $\mathcal{W} = \text{span}(W) = \text{span}((\mu_1 I - A)^{-T}c, \dots, (\mu_r I - A)^{-T}c)$
  - 4:  $W = W(W^T V)^{-T}$  damit  $W^T V = I$
  - 5: **while**  $\|\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}\| > \text{tol}$  **do**
  - 6:      $A_r = W^T A V$
  - 7:      $\mu_i^{(k)} = -\lambda_i(A_r)$
  - 8:     Bestimme  $\mathcal{V} = \text{span}(V) = \text{span}((\mu_1 I - A)^{-1}b, \dots, (\mu_r I - A)^{-1}b)$
  - 9:     Bestimme  $\mathcal{W} = \text{span}(W) = \text{span}((\mu_1 I - A)^{-T}c, \dots, (\mu_r I - A)^{-T}c)$
  - 10:      $W = W(W^T V)^{-T}$
  - 11:      $k \leftarrow k + 1$
  - 12: **end while**
  - 13:  $A_r = W^T A V$ ,     $b_r = W^T b$ ,     $c_r = V^T c$
-

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das IRKA-Verfahren

### Algorithmus 1 Iterativer Rationaler Krylovinterpolationsalgorithmus

**Input:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b = B \in \mathbb{R}^n$ ,  $c = C^T \in \mathbb{R}^n$  und  $\mu^{(0)} = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ .

**Output:**  $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $b_r = B_r \in \mathbb{R}^r$ ,  $c_r = C_r^T \in \mathbb{R}^r$  mit lokal minimalem  $H_r$

1:  $k \leftarrow 0$

2: Bestimme  $\mathcal{V} = \text{span}(V) = \text{span}((\mu_1 I - A)^{-1}b, \dots, (\mu_r I - A)^{-1}b)$

3: Bestimme  $\mathcal{W} = \text{span}(W) = \text{span}((\mu_1 I - A)^{-T}c, \dots, (\mu_r I - A)^{-T}c)$

4:  $W = W(W^T V)^{-T}$  damit  $W^T V = I$

5: **while**  $\|\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}\| > \text{tol}$

6:  $A_r = W^T A V$

7:  $\mu_i^{(k)} = -\lambda_i(A_r)$

8: Bestimme  $\mathcal{V} = \text{span}(V)$

9: Bestimme  $\mathcal{W} = \text{span}(W)$

10:  $W = W(W^T V)^{-T}$

11:  $k \leftarrow k + 1$

12: **end while**

13:  $A_r = W^T A V$ ,  $b_r = W^T b$ ,  $c_r = V^T c$

$W^T V$  meist schlecht konditioniert. Abhilfe:

- wiederholtes Lösen  $\rightarrow$  beeinflusst negativ die Konvergenz

- Biorthonormalisierung von  $V$  und  $W$   $\rightarrow$  nur geringer Einfluss der Kondition



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Numerische Ergebnisse - IRKA

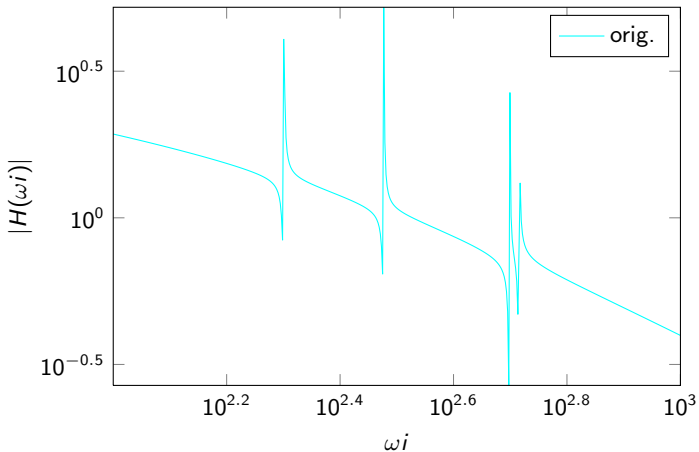


Abbildung: Bodeplot für das künstliche Problem

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Numerische Ergebnisse - IRKA

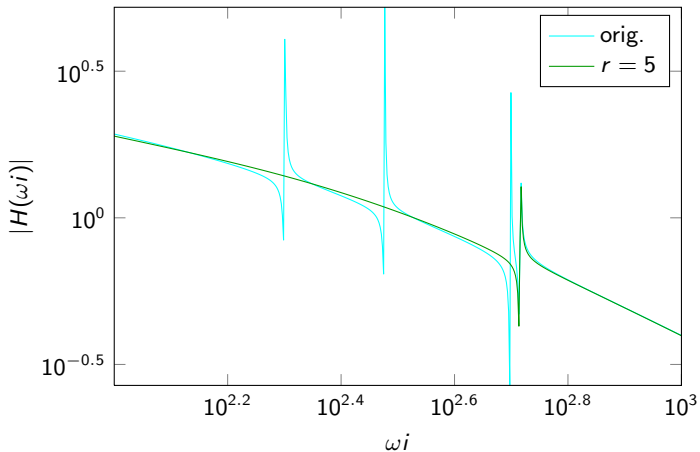


Abbildung: Bodeplot für das künstliche Problem

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Numerische Ergebnisse - IRKA

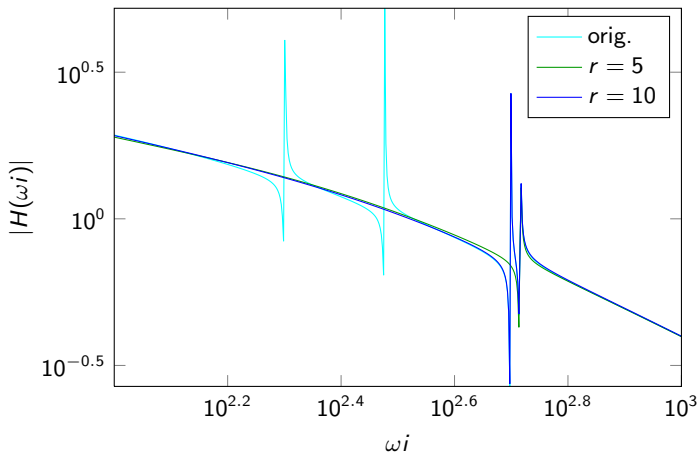


Abbildung: Bodeplot für das künstliche Problem

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Numerische Ergebnisse - IRKA

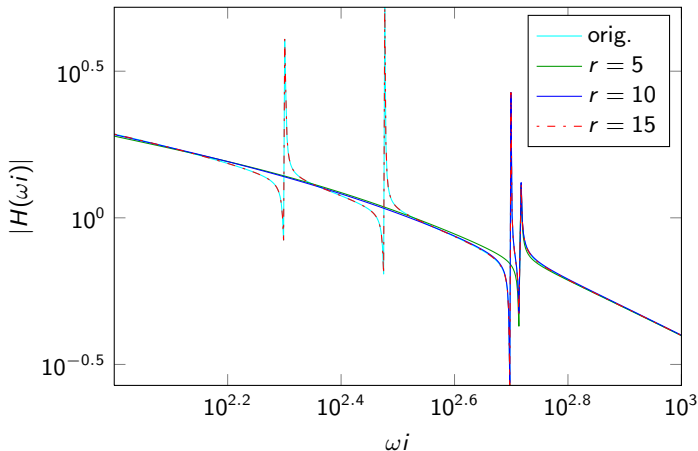


Abbildung: Bodeplot für das künstliche Problem



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

Numerische Ergebnisse - IRKA

Dimension $r$	$\ H - H_r\ _{\mathcal{H}_2}$
5	1.814e+01
10	1.513e+01
15	2.670e-03
20	1.383e-03
25	2.339e-08

**Tabelle:** Finaler  $\mathcal{H}_2$ -Fehler, künstliches Problem



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Numerische Ergebnisse - IRKA

Dimension $r$	$\ H - H_r\ _{\mathcal{H}_2}$
5	1.814e+01
10	1.513e+01
15	2.670e-03
20	1.383e-03
25	2.339e-08

**Tabelle:** Finaler  $\mathcal{H}_2$ -Fehler, künstliches Problem

Problem	$r = 6$	$r = 10$	$r = 15$	$r = 20$
FDM-Heat 625	3.796e-05	1.406e-08	2.592e-13	2.055e-14
2 500	1.626e-03	3.745e-06	8.946e-10	1.855e-13
10 000	1.725e-02	1.160e-04	1.338e-07	1.054e-10
40 000	1.217e-01	1.334e-03	4.386e-06	1.866e-08
160 000	6.096e-01	1.321e-02	9.361e-05	7.608e-07
250 000	9.850e-01	2.492e-02	2.155e-04	2.034e-06

**Tabelle:** Finaler  $\mathcal{H}_2$ -Fehler des IRKA-Verfahrens nach 15 Schritten



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Ableitung des Fehlerfunktionals

**Alternative Idee:** Durch Ableiten von

$$J(A_r, B_r, C_r) := \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \text{trace} \left( \tilde{C} \tilde{P} \tilde{C}^T \right) = \text{trace} \left( \tilde{B}^T \tilde{Q} \tilde{B} \right)$$

nach  $A_r, B_r, C_r,$

[WILSON '70]

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Ableitung des Fehlerfunktionals



**Alternative Idee:** Durch Ableiten von

$$J(A_r, B_r, C_r) := \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \text{trace}(\tilde{C}\tilde{P}\tilde{C}^T) = \text{trace}(\tilde{B}^T\tilde{Q}\tilde{B})$$

nach  $A_r, B_r, C_r,$

[WILSON '70]

mit der Partitionierung der Gramschen

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix}$$





# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Ableitung des Fehlerfunktionals

**Alternative Idee:** Durch Ableiten von

$$J(A_r, B_r, C_r) := \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \text{trace} \left( \tilde{C} \tilde{P} \tilde{C}^T \right) = \text{trace} \left( \tilde{B}^T \tilde{Q} \tilde{B} \right)$$

nach  $A_r, B_r, C_r,$

[WILSON '70]

mit der Partitionierung der Gramschen

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix}$$

erhalten wir:

- $\nabla_{A_r} J = 2 (P_{12}^T Q_{12} + P_{22} Q_{22}) = 0$
- $\nabla_{B_r} J = 2 Q_{12}^T B + 2 Q_{22} B r = 0 \rightarrow B_r = -Q_{22}^{-1} Q_{12}^T B$
- $\nabla_{C_r} J = -2 C P_{12} + 2 C_r P_{22} = 0 \rightarrow C_r = C P_{12} P_{22}^{-1}$

→ Wilson-Bedingungen für  $\mathcal{H}_2$ -Optimalität

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Ableitung des Fehlerfunktionals

**Alternative Idee:** Durch Ableiten von

$$J(A_r, B_r, C_r) := \|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \text{trace}(\tilde{C}\tilde{P}\tilde{C}^T) = \text{trace}(\tilde{B}^T\tilde{Q}\tilde{B})$$

nach  $A_r, B_r, C_r$ ,

mit der Partitionierung

Ergeben die Projektoren

$$W = -Q_{12}Q_{22}^{-1}$$

$$\tilde{P} =$$

und

$$V = P_{12}P_{22}^{-1}$$

[WILSON '70]

erhalten wir:

$$\bullet \nabla_{A_r} J = 2(P_{12}^T Q_{12} + P_{22} Q_{22}) = 0$$

$$\bullet \nabla_{B_r} J = 2Q_{12}^T B + 2Q_{22} B r = 0 \rightarrow B_r = -Q_{22}^{-1} Q_{12}^T B$$

$$\bullet \nabla_{C_r} J = -2C P_{12} + 2C_r P_{22} = 0 \rightarrow C_r = C P_{12} P_{22}^{-1}$$

→ Wilson-Bedingungen für  $\mathcal{H}_2$ -Optimalität

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das TSIA-Verfahren



→ Problem: reduziertes Modell i. A. nicht vollständig steuer- und beobachtbar →  $P_{22}$  und  $Q_{22}$  nicht invertierbar.

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das TSIA-Verfahren



→ Problem: reduziertes Modell i. A. nicht vollständig steuer- und beobachtbar →  $P_{22}$  und  $Q_{22}$  nicht invertierbar.

**Lösung:** Sicherstellung von  $W^T V = I$  durch  $V = P_{12}$  und  $W = Q_{12}(P_{12}Q_{12})^{-1}$  anstelle des LöSENS mit  $P_{22}$  und  $Q_{22}$ .

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das TSIA-Verfahren



→ Problem: reduziertes Modell i. A. nicht vollständig steuer- und beobachtbar →  $P_{22}$  und  $Q_{22}$  nicht invertierbar.

**Lösung:** Sicherstellung von  $W^T V = I$  durch  $V = P_{12}$  und  $W = Q_{12}(P_{12}Q_{12})^{-1}$  anstelle des LöSENS mit  $P_{22}$  und  $Q_{22}$ .

→ Bedingungen an die erste Ableitung des Fehlerfunktionals bleiben erfüllt.



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das TSIA-Verfahren

→ Problem: reduziertes Modell i. A. nicht vollständig steuer- und beobachtbar →  $P_{22}$  und  $Q_{22}$  nicht invertierbar.

**Lösung:** Sicherstellung von  $W^T V = I$  durch  $V = P_{12}$  und  $W = Q_{12}(P_{12}Q_{12})^{-1}$  anstelle des LöSENS mit  $P_{22}$  und  $Q_{22}$ .

→ Bedingungen an die erste Ableitung des Fehlerfunktionals bleiben erfüllt.

→ Aus Konditionsgründen ist die Korrekturgleichung durch die Biorthonormalisierung wie im IRKA-Verfahren zu ersetzen.



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das TSIA-Verfahren

→ Problem: reduziertes Modell i. A. nicht vollständig steuer- und beobachtbar →  $P_{22}$  und  $Q_{22}$  nicht invertierbar.

**Lösung:** Sicherstellung von  $W^T V = I$  durch  $V = P_{12}$  und  $W = Q_{12}(P_{12}Q_{12})^{-1}$  anstelle des LöSENS mit  $P_{22}$  und  $Q_{22}$ .

→ Bedingungen an die erste Ableitung des Fehlerfunktionals bleiben erfüllt.

→ Aus Konditionsgründen ist die Korrekturgleichung durch die Biorthonormalisierung wie im IRKA-Verfahren zu ersetzen.

**Problem:** Bestimmung der optimalen  $P_{12}$  und  $Q_{12}$  benötigt bereits das optimale reduzierte Modell.



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das TSIA-Verfahren

→ Problem: reduziertes Modell i. A. nicht vollständig steuer- und beobachtbar →  $P_{22}$  und  $Q_{22}$  nicht invertierbar.

**Lösung:** Sicherstellung von  $W^T V = I$  durch  $V = P_{12}$  und  $W = Q_{12}(P_{12}Q_{12})^{-1}$  anstelle des LöSENS mit  $P_{22}$  und  $Q_{22}$ .

→ Bedingungen an die erste Ableitung des Fehlerfunktionals bleiben erfüllt.

→ Aus Konditionsgründen ist die Korrekturgleichung durch die Biorthonormalisierung wie im IRKA-Verfahren zu ersetzen.

**Problem:** Bestimmung der optimalen  $P_{12}$  und  $Q_{12}$  benötigt bereits das optimale reduzierte Modell.

**Lösung:** Berechnen aus beliebigem reduziertem Modell  $P_{12}$  und  $Q_{12}$  und bestimmen fortlaufend  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$ ,  $P_{12}$  und  $Q_{12}$  als Fixpunktiteration.





# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das TSIA-Verfahren

---

### Algorithmus 2 Zweiseitiger Iterationsalgorithmus, TSIA

---

**Input:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  und Startlösung  $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^r$  und  $C_r \in \mathbb{R}^{1 \times r}$

**Output:**  $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^r$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{1 \times r}$

- 1: **for**  $i = 1, \dots$  **do**
  - 2:   Löse  $AP_{12} + P_{12}A_r^T + BB_r^T = 0$
  - 3:   Löse  $A^T Q_{12} + Q_{12}A_r - C^T C_r = 0$
  - 4:    $V = P_{12}$ ,  $W = Q_{12}$
  - 5:    $[V, W] = \text{biorth}(V, W)$
  - 6:    $A_r = W^T A V$ ,  $B_r = W^T B$  und  $C_r = C V$
  - 7: **end for**
-

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das TSIA-Verfahren

---

### Algorithmus 2 Zweiseitiger Iterationsalgorithmus, TSIA

---

**Input:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  und Startlösung  $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^r$  und  $C_r \in \mathbb{R}^{1 \times r}$

**Output:**  $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^r$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{1 \times r}$

- 1: **for**  $i = 1, \dots$  **do**
- 2: Löse  $AP_{12} + P_{12}A_r^T + BB_r^T = 0$
- 3: Löse  $A^T Q_{12} + Q_{12}A_r - C^T C_r = 0$
- 4:  $V = P_{12}$ ,  $W = Q_{12}$
- 5:  $[V, W] = \text{biorth}(V, W)$
- 6:  $A_r = W^T A V$ ,  $B_r = W^T B$  und  $C_r = C V$
- 7: **end for**

#### spezielle Sylvestergleichung

Besondere Form der Sylvestergleichung mit  $A$  groß, dünnbesetzt und  $A_r$  klein und dichtbesetzt.

→ spezieller direkter Löser notwendig.

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Das TSIA-Verfahren

### Algorithmus 2 Zweiseitiger Iterationsalgorithmus, TSIA

**Input:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  und Startlösung  $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^r$  und  $C_r \in \mathbb{R}^{1 \times r}$

**Output:**  $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^r$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{1 \times r}$

- 1: **for**  $i = 1, \dots$  **do**
- 2: Löse  $AP_{12} + P_{12}A_r^T + BB_r^T = 0$
- 3: Löse  $A^T Q_{12} + Q_{12}A_r - C^T C_r = 0$
- 4:  $V = P_{12}$ ,  $W = Q_{12}$
- 5:  $[V, W] = \text{biorth}(V, W)$
- 6:  $A_r = W^T A V$ ,  $B_r = W^T B$  und  $C_r = C V$
- 7: **end for**

#### spezielle Sylvestergleichung

Besondere Form der Sylvestergleichung mit  $A$  groß, dünnbesetzt und  $A_r$  klein und dichtbesetzt.

→ spezieller direkter Löser notwendig.

→ Durch zusätzliches Lösen von  $A_r^T Q_{22} + Q_{22}A_r + C_r^T C_r = 0$  kann mit

$$\|H - H_r\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|H\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \text{trace}(B_r^T Q_{22} B_r) + 2 \text{trace}(B^T Q_{12} B_r)$$

effizient der  $\mathcal{H}_2$ -Fehler bestimmt werden.

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Numerische Ergebnisse - TSIA

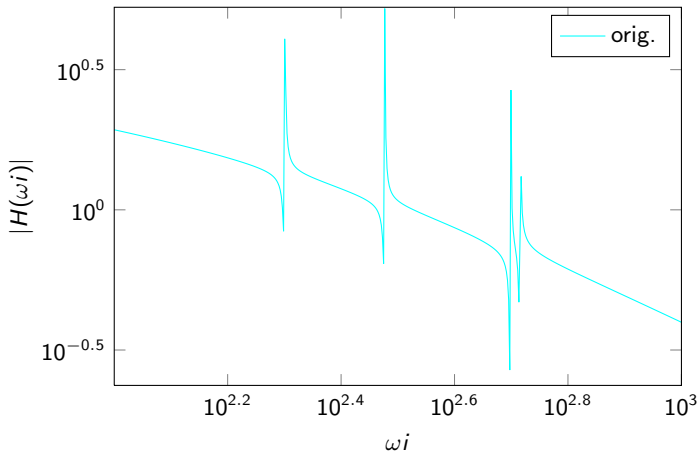


Abbildung: Bodeplot für das künstliche Problem, Spektralinformationen genutzt

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Numerische Ergebnisse - TSIA

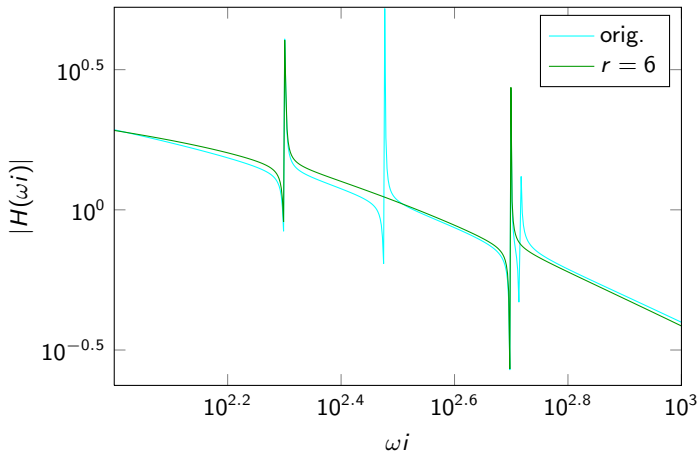


Abbildung: Bodeplot für das künstliche Problem, Spektralinformationen genutzt

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Numerische Ergebnisse - TSIA

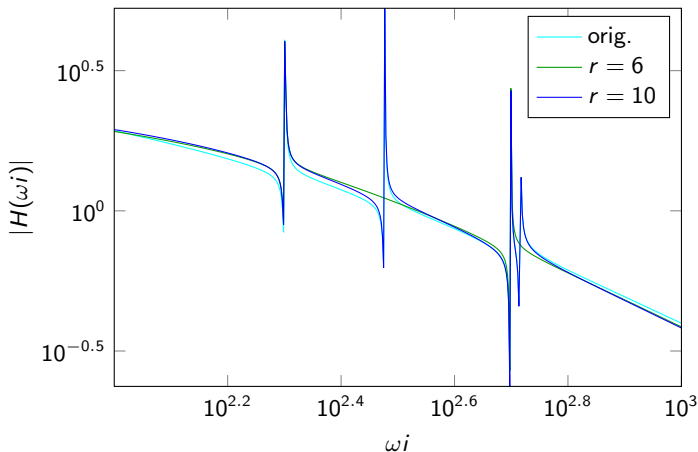


Abbildung: Bodeplot für das künstliche Problem, Spektralinformationen genutzt

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Numerische Ergebnisse - TSIA

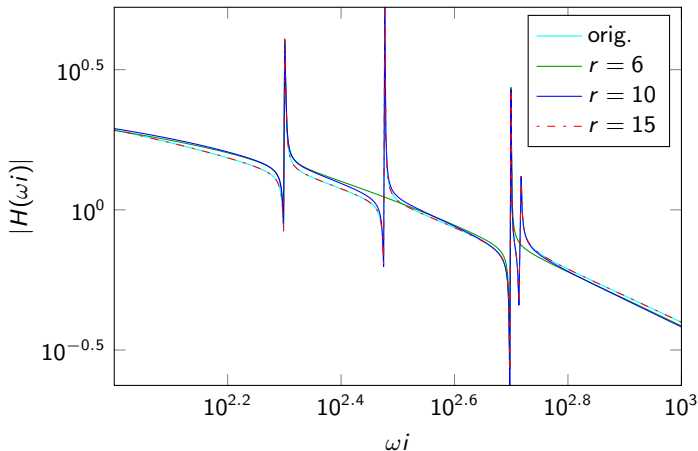


Abbildung: Bodeplot für das künstliche Problem, Spektralinformationen genutzt



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Numerische Ergebnisse - TSIA

Dimension $r$	$\ H - H_r\ _{\mathcal{H}_2}$
6	1.049e+01
10	1.775e+00
15	2.670e-03
20	1.698e-06
25	9.422e-10

**Tabelle:** Finaler  $\mathcal{H}_2$ -Fehler, künstliches Problem





# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Numerische Ergebnisse - TSIA

Dimension $r$	$\ H - H_r\ _{\mathcal{H}_2}$
6	1.049e+01
10	1.775e+00
15	2.670e-03
20	1.698e-06
25	9.422e-10

**Tabelle:** Finaler  $\mathcal{H}_2$ -Fehler, künstliches Problem

Problem	$r = 6$	$r = 10$	$r = 15$	$r = 20$
FDM-Heat 625	3.796e-05	1.406e-08	2.762e-13	1.417e-14
2 500	1.626e-03	3.745e-06	8.813e-10	4.260e-13
10 000	1.725e-02	1.160e-04	1.338e-07	1.839e-10
40 000	1.217e-01	1.334e-03	4.386e-06	1.868e-08
160 000	6.111e-01	1.340e-02	9.400e-05	7.966e-07
250 000	9.895e-01	2.543e-02	2.163e-04	2.079e-06

**Tabelle:** Finaler  $\mathcal{H}_2$ -Fehler des TSIA-Verfahrens nach 15 Schritten

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Zusammenhang IRKA- und TSIA-Verfahren



→ IRKA- und TSIA-Verfahren sind 2 Methoden zur  $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion:  
gibt es Gemeinsamkeiten?



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Zusammenhang IRKA- und TSIA-Verfahren

→ IRKA- und TSIA-Verfahren sind 2 Methoden zur  $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion:  
gibt es Gemeinsamkeiten?

### Satz (K. '10)

Sei mit  $\Sigma$  ein unreduziertes SISO LTI-System gegeben. Weiterhin sei  $\Sigma_r$  ein zugehöriges reduziertes System. Des Weiteren seien  $A$  und  $A_r$  reell und stabil. Mit  $\mu_i = -\lambda_i(A_r)$  seien die Interpolationspunkte für das IRKA-Verfahren gegeben, dann gilt

$$\mathcal{V}^{IRKA} = \mathcal{V}^{TSIA}$$

und

$$\mathcal{W}^{IRKA} = \mathcal{W}^{TSIA}.$$



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Zusammenhang IRKA- und TSIA-Verfahren

→ IRKA- und TSIA-Verfahren sind 2 Methoden zur  $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion:  
gibt es Gemeinsamkeiten?

### Satz (K. '10)

Sei mit  $\Sigma$  ein unreduziertes SISO LTI-System gegeben. Weiterhin sei  $\Sigma_r$  ein zugehöriges reduziertes System. Des Weiteren seien  $A$  und  $A_r$  reell und stabil. Mit  $\mu_i = -\lambda_i(A_r)$  seien die Interpolationspunkte für das IRKA-Verfahren gegeben, dann gilt

$$\mathcal{V}^{IRKA} = \mathcal{V}^{TSIA}$$

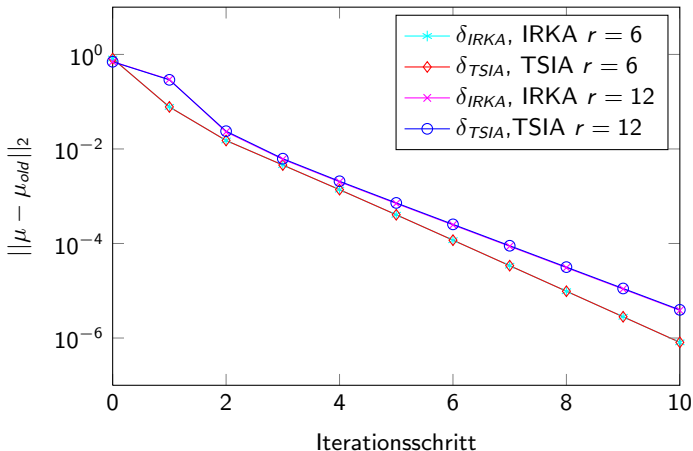
und

$$\mathcal{W}^{IRKA} = \mathcal{W}^{TSIA}.$$

→ Beweis erfolgt mit Hilfe der Eigenwertzerlegung von  $A_r$

# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Zusammenhang IRKA- und TSIA-Verfahren



**Abbildung:** Differenz der Interpolationspunkte im IRKA- und TSIA-Verfahren für die Wärmeleitung



# $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion

## Zusammenhang IRKA- und TSIA-Verfahren

red. Dimension $r$	$\ \delta_{IRKA} - \delta_{TSIA}\ _2$
6	8.639e-10
12	6.894e-03

**Tabelle:** Differenz der Interpolationspunkte im IRKA- und TSIA-Verfahren für die Wärmeleitung

# Spezieller Sylvesterlöser



Betrachten die Sylvestergleichung

$$AX + XH + M = 0$$

mit  $A$  groß und dünnbesetzt,  $H$  klein und dichtbesetzt.

# Spezieller Sylvesterlöser



Betrachten die Sylvestergleichung

$$AX + XH + M = 0$$

mit  $A$  groß und dünnbesetzt,  $H$  klein und dichtbesetzt.

**Grundidee:** Lösen mit  $A$  ist möglich.  $H$  durch deren Schurzerlegung  $H = USU^T$  ersetzen und mit „Rückwärtselimination“ lösen.





# Spezieller Sylvesterlöser

Betrachten die Sylvestergleichung

$$AX + XH + M = 0$$

mit  $A$  groß und dünnbesetzt,  $H$  klein und dichtbesetzt.

**Grundidee:** Lösen mit  $A$  ist möglich.  $H$  durch deren Schurzerlegung  $H = USU^T$  ersetzen und mit „Rückwärtselimination“ lösen.

---

## Algorithmus 5 Lösung der speziellen Sylvestergleichung

---

**Input:**  $AX + XS + M = 0$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$

**Output:**  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$

1: Berechne Schurzerlegung  $USU^T = H$

2:  $\tilde{M} = MU$

3: **for**  $j = 1, \dots, m$  **do**

4: Löse  $(A + S_{jj}I)\tilde{X}(:, j) = -\tilde{M} - \sum_{i=1}^{j-1} S_{ij}\tilde{X}(:, i)$

5: **end for**

6:  $X = \tilde{X}U$

---



# Spezieller Sylvesterlöser

Problem FDM-Heat	$r$	sylv	lyap	sm_sylv	C.M.E.S.S.	Speedup $\frac{\text{lyap}}{\text{sm_sylv}}$
625	5	1.653	0.173	0.024	0.008	7.254
625	10	10.503	0.188	0.048	0.011	3.891
625	15	32.938	0.207	0.081	0.024	2.554
2 500	5	74.934	9.348	0.107	0.051	87.119
2 500	10	559.524	9.722	0.253	0.055	38.394
2 500	15	-	10.094	0.364	0.082	27.712
10 000	5	-	537.658	0.515	0.248	1 044.241
10 000	10	-	543.971	1.171	0.397	464.706
10 000	15	-	553.388	1.946	0.458	284.337
250 000	5	-	-	21.626	22.200	-
250 000	10	-	-	43.516	42.422	-
250 000	15	-	-	85.176	52.031	-

**Tabelle:** Zeitvergleich: Verschiedene Löser für die spezielle Sylvestergleichung und deren Transponierte, Zeiten in Sekunden

# Schlussfolgerungen und Ausblick



## Schlussfolgerungen:

- $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion mit Matrixgleichungen ist möglich



# Schlussfolgerungen und Ausblick

## Schlussfolgerungen:

- $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion mit Matrixgleichungen ist möglich
- Diese ist äquivalent zur Interpolationsidee



# Schlussfolgerungen und Ausblick

## Schlussfolgerungen:

- $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion mit Matrixgleichungen ist möglich
- Diese ist äquivalent zur Interpolationsidee
- Interpolationsansatz auch für verallgemeinerte Systeme nutzbar

# Schlussfolgerungen und Ausblick



## Schlussfolgerungen:

- $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion mit Matrixgleichungen ist möglich
- Diese ist äquivalent zur Interpolationsidee
- Interpolationsansatz auch für verallgemeinerte Systeme nutzbar
- Anwendung der Single-Pattern Multi-Value Idee zur Lösung von  $(A + p_i I)x = b$  auf ADI-Verfahren, IRKA-Verfahren, Sylvesterlöser und Übertragungsfunktion erfolgreich

# Schlussfolgerungen und Ausblick



## Schlussfolgerungen:

- $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion mit Matrixgleichungen ist möglich
- Diese ist äquivalent zur Interpolationsidee
- Interpolationsansatz auch für verallgemeinerte Systeme nutzbar
- Anwendung der Single-Pattern Multi-Value Idee zur Lösung von  $(A + p_i I)x = b$  auf ADI-Verfahren, IRKA-Verfahren, Sylvesterlöser und Übertragungsfunktion erfolgreich

## In Zukunft zu betrachten:

- Entwicklung von Blocklösern, zum Beispiel für das Fehlersystem

# Schlussfolgerungen und Ausblick



## Schlussfolgerungen:

- $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion mit Matrixgleichungen ist möglich
- Diese ist äquivalent zur Interpolationsidee
- Interpolationsansatz auch für verallgemeinerte Systeme nutzbar
- Anwendung der Single-Pattern Multi-Value Idee zur Lösung von  $(A + p_i I)x = b$  auf ADI-Verfahren, IRKA-Verfahren, Sylvesterlöser und Übertragungsfunktion erfolgreich

## In Zukunft zu betrachten:

- Entwicklung von Blocklösern, zum Beispiel für das Fehlersystem
- Anpassung des TSIA-Verfahrens auf verallgemeinerte Systeme



# Schlussfolgerungen und Ausblick



## Schlussfolgerungen:

- $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion mit Matrixgleichungen ist möglich
- Diese ist äquivalent zur Interpolationsidee
- Interpolationsansatz auch für verallgemeinerte Systeme nutzbar
- Anwendung der Single-Pattern Multi-Value Idee zur Lösung von  $(A + p_i I)x = b$  auf ADI-Verfahren, IRKA-Verfahren, Sylvesterlöser und Übertragungsfunktion erfolgreich

## In Zukunft zu betrachten:

- Entwicklung von Blocklösern, zum Beispiel für das Fehlersystem
- Anpassung des TSIA-Verfahrens auf verallgemeinerte Systeme
- Entwicklung eines verallgemeinerten speziellen Sylvesterlösers

# Schlussfolgerungen und Ausblick



## Schlussfolgerungen:

- $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion mit Matrixgleichungen ist möglich
- Diese ist äquivalent zur Interpolationsidee
- Interpolationsansatz auch für verallgemeinerte Systeme nutzbar
- Anwendung der Single-Pattern Multi-Value Idee zur Lösung von  $(A + p_i I)x = b$  auf ADI-Verfahren, IRKA-Verfahren, Sylvesterlöser und Übertragungsfunktion erfolgreich

## In Zukunft zu betrachten:

- Entwicklung von Blocklösern, zum Beispiel für das Fehlersystem
- Anpassung des TSIA-Verfahrens auf verallgemeinerte Systeme
- Entwicklung eines verallgemeinerten speziellen Sylvesterlösers
- Algorithmus zur gezielten Erfüllung einer  $\mathcal{H}_2$ -Fehlerschranke



# Schlussfolgerungen und Ausblick

## Schlussfolgerungen:

- $\mathcal{H}_2$ -Modellreduktion mit Matrixgleichungen ist möglich
- Diese ist äquivalent zur Interpolationsidee
- Interpolationsansatz auch für verallgemeinerte Systeme nutzbar
- Anwendung der Single-Pattern Multi-Value Idee zur Lösung von

(A + b/j)x = b auf ADI-Verfahren, IRKA-Verfahren, Sylvesterlöser und

**Danke für Ihre Aufmerksamkeit.**

## In Zukunft zu betrachten:

- Entwicklung von Blocklösern, zum Beispiel für das Fehlersystem
- Anpassung des TSIA-Verfahrens auf verallgemeinerte Systeme
- Entwicklung eines verallgemeinerten speziellen Sylvesterlösers
- Algorithmus zur gezielten Erfüllung einer  $\mathcal{H}_2$ -Fehlerschranke