Konvergenzkriterien für Reihen und Konvergenzradius von Potenzreihen

Jens Saak

Professur Mathematik in Industrie und Technik
Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz

27. April 2005

überarbeitete Fassung vom 7. April 2010

Übersicht

Konvergenzkriterien für Reihen

Definition des Reihenbegriffs

Sei $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge reeller Zahlen. Die Folge

$$s_n := \sum_{i=0}^{n} u_i \; ; \qquad n \in \mathbb{N}$$

heißt (unendliche) Reihe und wird mit

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i \left(:= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} u_i \right)$$

bezeichnet.
Sie konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left| \sum_{i=m}^{n} u_i \right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq m \geq N$.

Beispiele

Konvergente Reihen:

- geometrische Reihe für $|q| < 1$

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$$

- Exponentialreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Divergente Reihen:

- Harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

- geometrische Reihe für $|q| \geq 1$

Vergleichskriterien

Majorantenkriterium

Existiert zu $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ eine konvergente **Majorante** $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$, d.h $v_i \geq |u_i|$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ konvergent, dann konvergiert auch $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$.

Minorantenkriterium

Existiert zu $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ eine divergente **Minorante** $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$, d.h $0 \leq v_i \leq u_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ divergent, dann divergiert auch $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$.

Kriterien von d'Alembert, Cauchy und Leibniz

Quotientenkriterium (d' Alembert)

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ für $(u_n > 0)$, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ konvergent für $q < 1$ und divergent für $q > 1$.

Wurzelkriterium (Cauchy)

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$ für $(u_n > 0)$, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ konvergent für $q < 1$ und divergent für $q > 1$.

Alternierende Reihen (Leibniz)

Gilt $u_n \geq 0 \; \forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ und $u_n \geq u_{n+1}$, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$.

Potenzreihen und Konvergenzradius

Definition der Potenzreihe

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Reihe

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißt **Potenzreihe**. Sie konvergiert auf einem **Konvergenzintervall/Konvergenzkreis** $(x_0 - r, x_0 + r)$ (mit $r \in [0, \infty]$). r heißt der **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

Konvergenz für $|x - x_0| < r$, Divergenz für $|x - x_0| > r$.

Berechnung des Konvergenzradius

Der Konvergenzradius kann aus

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

oder

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

berechnet werden.