Konvergenz von Reihen

Allgemeine Konvergenzbedingung

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, falls die Folge der Partailsummen $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ für $n \to \infty$ konvergiert.

Hauptkriterium (Beschränktheit)

Ist die Folge der Partialsummen $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ beschränkt und $a_k \geq 0$ für alle k, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Konvergenz von Reihen

absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
Absolut konvergente Reihen konvergieren auch im gewöhnlichen Sinne.

notwendiges Kriterium (aber nicht hinreichend)

Konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Vergleichskriterien

Majorantenkriterium

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, so dass die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert. Gilt $|a_k| \leq c_k$, dann konvergiert auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Minorantenkriterium

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, so dass die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ divergiert. Gilt $|a_k| \geq c_k$, dann divergiert auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Gliedweise Kriterien

Quotientenkriterium

Gilt $a_n > 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ falls $q < 1$ und divergiert falls $q > 1$.

Wurzelkriterium

Gilt $a_n > 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ falls $q < 1$ und divergiert falls $q > 1$.

Spezielle Reihen

Alternierende Reihen (Leibniz-Kriterium)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen, dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$

Harmonische Reihe

Die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergiert.

Geometrische Reihe

Die geometrische Reihe $s=\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q|<1$ und es gilt $s=\frac{1}{1-q}$. Divergenz tritt bei $|q|\geq 1$ ein.