Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Wintersemester 2007/2008
Dipl. Math. Jens Saak
Dipl. Math. Ulrike Baur

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 3. Hausaufgabe

Abgabetermin: 11.01.2008
(in der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte) (Tridiagonalform einer symmetrischen Matrix)

Für alle symmetrischen $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ existiert eine orthogonale Matrix, so daß

$$Q^T A Q = T = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{1}$$

d.h., T ist Tridiagonalmatrix. Leiten Sie einen Algorithmus her, der die Tridiagonalform wie in (1) berechnet und bestimmen Sie dessen Aufwand.

Aufgabe 2 (5 Punkte) (Pseudospektrum)

Zeigen Sie für $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\varepsilon > 0$ und $\|.\| = \|.\|_2$, dass folgende Definitionen des ε–Pseudospektrums äquivalent sind:

1. $\Lambda_\varepsilon(A) := \left\{\mu \in \mathbb{C} \mid \|(A-\mu I)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}\right\}$
2. $\Lambda_\varepsilon(A) := \{\mu \in \mathbb{C} \mid \exists E \in \mathbb{C}^{n,n} \text{ mit } \|E\| < \varepsilon \text{ und } \mu \in \Lambda(A+E)\}$
3. $\Lambda_\varepsilon(A) := \{\mu \in \mathbb{C} \mid \|(A-\mu I)v\| < \varepsilon \text{ für } v \in \mathbb{C}^n \text{ mit } \|v\| = 1\}$

Hinweis: Stellen Sie dazu E an geeigneter Stelle als Rang-1 Störung dar, d.h. $E = suw^*$ für $u, w \in \mathbb{C}^n$ mit $\|u\| = \|w\| = 1$ und $s \in \mathbb{C}$.
Zusatz: An welcher Stelle benötigt der Beweis die Bedingung $\|.\| = \|.\|_2$, lässt sich der Beweis erweitern, so dass das Resultat für beliebige Normen gilt?

Aufgabe 3 (5 Punkte) (A-posteriori Fehlerabschätzungen für Eigenwerte)

a) Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Bauer–Fike, dass die Norm des Residuums $r := A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x}$ eine obere Schranke für den Rückwärtsfehler bei der Berechnung eines Eigenpaares $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$, $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$ zur Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ist.

Veranschaulichen Sie dieses Ergebnis in MATLAB anhand der Matrix $A =$`gallery('frank',n)` für verschiedene ungerade n (etwa $n = [5:4:61]$). Verwenden Sie dazu, dass für ungerade n stets 1 ein Eigenwert von A ist (Siehe `doc gallery`. Ploten Sie einerseits den Fehler zum Eigenwert 1 über der Matrixdimension, sowie den berechneten Eigenwert $\tilde{\lambda}$, die 1 und den Kreis mit Radius $\|r\|$ um $\tilde{\lambda}$.

Hinweis: Es gilt $(A+E)\tilde{x} = \tilde{\lambda}\tilde{x}$ mit $E = -r\tilde{x}^*$.

Zusatz: Berechnen Sie für einen kleinen Wert von n die exakten Eigenwerte (per Hand oder Computeralgebra) und erstellen Sie dazu den Plot mit exakten und berechneten Eigenwerten, sowie den Fehlerumgebungen zu den berechneten Eigenwerten.

b) Berechnen Sie nun die Fehlerschranken gemäß Störungssatz II.11. Wiederholen sie das obige Vorgehen und vergleichen sie diese Abschätzungen mit denen aus Bauer–Fike.

Aufgabe 4 (5 Punkte) (EigTool)

Laden Sie von `http://web.comlab.ox.ac.uk/projects/pseudospectra/eigtool/` die EigTool Software herunter. Folgen Sie den Installationsanweisungen auf der Web-Site und testen Sie die Software wie angegeben. (**Hinweis:** Es kann auftreten, dass sich das EigTool trotz passend gesetzter Pfade nicht korrekt ausführen lässt, wenn es nicht aus dem Installationsverzeichnis aufgerufen wird. Dabei handelt es sich offenbar um einen Fehler in der lokalen Java Installation. Stellen sie daher sicher, dass `eigtool` in diesem Fall aus dem Installationsverzeichnis aufgerufen wird, bzw. MATLAB ohne Java Unterstützung (Kommandozeilenparameter -nojvm) gestartet wurde.)
Erstellen Sie dann die Pseudospektralplots für die Boeing und Tolosa Matrizen aus den Demos, sowie die `frank` Matrix aus Aufgabe 3.