

Numerische Mathematik– 10. Hausaufgabe

Abgabetermin: 17./18.6.2009
(in der jeweiligen Übungsgruppe)

Theoretische Aufgaben

Aufgabe 1 (5 Punkte) (Aitken's Δ^2 -Algorithmus im \mathbb{R}^n)

Bei der Erweiterung des in Übung 9 Aufgabe 1 eingeführten Δ^2 -Algorithmus auf Folgen $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ gibt es einige (lösbare) Schwierigkeiten. Wir müssen hier allgemein

$$x_k - x_* = C(x_{k-1} - x_*),$$

mit Grenzwert x_* und $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ annehmen. Im Gegensatz zum skalaren γ in der Übung lässt sich C also nicht aus zwei (sondern ggf. n) aufeinanderfolgenden Schritten berechnen.

- a) Definieren sie $u_k = \Delta x_k$, $v_k = \Delta^2 x_k$ sowie $U_k = [u_0, \dots, u_{k-1}]$ und $V_k = [v_0, \dots, v_{k-1}]$. Nehmen Sie an V_n sei invertierbar und zeigen Sie damit

$$x_* = x_0 - U_n V_n^{-1} u_0 \quad (= x_0 - \Delta X (\Delta^2 X)^{-1} \Delta x_0).$$

Die *beschleunigte* Folge $(\bar{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ berechnet man dann nach der Vorschrift

$$V_n y = -u_0 \quad \bar{x}_n = x_0 - U_n y. \quad (1)$$

Hinweis: Zeigen sie zunächst $(I - C)(x_* - x_0) = u_0$ und drücken Sie dann $(I - C)^{-1}$ durch U_n und V_n aus.

- b) Die Berechnung von U_n und V_n benötigt n Auswertungen des Iterationsschrittes und ist damit in der Praxis nicht praktikabel. Außerdem sind die Differenzen bei Konvergenz sehr stark mit Auslöschung behaftet. Man verwendet daher oft in (1) nur $k < n$ Zwischenvektoren u_i, v_i und betrachtet das Ergebnis als eine ausreichende Näherung¹ für die nächste Iterierte. Welches Problem tritt dabei auf und in welchem Sinne kann (1) gelöst werden?

Aufgabe 2 (3 Punkte) (Numerisches Wurzelziehen)

Entwickeln Sie unter Verwendung des Newton Verfahrens eine auf Grundrechenarten basierende Iterationsvorschrift, um $\sqrt[n]{a}$ für beliebige $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ zu bestimmen! Benutzen Sie diese, um $\sqrt[3]{3} \approx 1.7320$ ausgehend von $x_0 = 3$ auf 2 Nachkommastellen genau zu berechnen!

¹man spricht in diesem Zusammenhang auch von reduced rank extrapolation (RRE) im Gegensatz zur full rank extrapolation in (1)

Programmieraufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte) (Iterative Gleichungssystemlöser: Splitting-Verfahren IV)

- Erweitern Sie das unterrelaxierte Gauß-Seidel Verfahren (mit Parameter 0.5) aus Hausaufgabe 9 Programmieraufgabe 1 so, dass seine Iteration/Konvergenz durch RRE beschleunigt wird. Programmieren Sie die Beschleunigung derart, dass sie verschiedene Anzahlen k von Zwischenvektoren zulässt.
- Testen Sie das beschleunigte Verfahren wieder anhand der Matrix A aus Hausaufgabe 7 Aufgabe 1. Stellen Sie die Residuenverläufe für verschiedene k in einem gemeinsamen (semilogarithmischen) Plot grafisch dar. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 2 (4 Punkte) (Newtonverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme)

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + y &= 1 \\x^2 - y^2 + x - y &= 2\end{aligned}$$

soll mittels Newton-Verfahren gelöst werden.

- Geben Sie dazu die Iterationsvorschrift und die dabei vorkommenden Matrizen und Vektoren explizit für das gegebene Gleichungssystem an.
- Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die diese Iterationsvorschrift verwendet, um die Lösung ausgehend von einem übergebenen Startwert zu berechnen.
- Speichern Sie für verschiedenen Startwerte jeweils die Anzahl der benötigten Iterationsschritte und den Vektor der beobachteten Konvergenzordnung $roc = \frac{\log(f(u_k))}{\log(f(u_{k-1}))}$ und vergleichen Sie diese.

Zusatz: Zeigen Sie, dass die beobachtete Konvergenzordnung, bei hinreichend weit fortgeschrittener Iteration, einer oberen Schranke der Konvergenzordnung im Residuum entspricht. Gehen Sie dabei davon aus, dass in der Praxis oft $c \approx 1$ gilt und wir ab einem gewissen $k_0 \in \mathbb{N}$ für alle $k > k_0$ annehmen können, dass $|f(u_k)| < 1$ gilt. (3 Punkte)