Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Sommersemester 2009
Prof. Dr. Peter Benner
Dipl.-Math. Jens Saak
Dipl.-Ing. Martin Bernauer

Numerische Mathematik– 11. Hausaufgabe

Abgabetermin: 24./25.6.2009
(in der jeweiligen Übungsgruppe)

Theoretische Aufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte) (Eine Variante des Newton-Verfahrens)

Das Newton-Verfahren zur Berechnung mehrfacher Nullstellen von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, allerdings ist die Konvergenz i.A. nur mehr linear. Eine geeignete Modifikation wollen wir in dieser Aufgabe untersuchen.

a) Zeigen Sie, dass im Falle einer m-fachen Nullstelle x^* (also $f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*)$) eine Darstellung der Form

$$f(x) = (x - x^*)^m \frac{1}{m!} f^{(m)}(\zeta_x)$$

gilt. (Hinweis: Satz von Taylor)

b) Setzen Sie nun $Q(x^*; x) := \frac{1}{m!} f^{(m)}(\zeta_x)$. Folgern Sie, dass

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x - x^*}{m} - \frac{1}{m}(x - x^*)^2 \frac{Q'(x^*; x)}{Q'(x^*; x)(x - x^*) + m\, Q(x^*; x)}$$

erfüllt und somit das Newton-Verfahren auch für $x \to x^*$ wohldefiniert ist.

c) Zeigen Sie für das modifizierte Newton-Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

die Darstellung

$$x^{(k+1)} - x^* = \left(1 - \frac{\alpha}{m}\right)(x^{(k)} - x^*) + \frac{\alpha}{m}(x^{(k)} - x^*)^2 \frac{Q'(x^*; x_k)}{Q'(x^*; x^{(k)})(x^{(k)} - x^*) + mQ(x^*; x^{(k)})}.$$

d) Wie ist α zu wählen um eine optimale Konvergenzrate zu erzielen?

Aufgabe 2 (3 Punkte) (Basen für Polynomräume)

Sei Π_n der Raum der Polynome mit Höchstordnung n.

a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Interpolationspolynome $L_0, \ldots, L_n$ eine Basis von Π_n bilden.

b) Zeigen Sie, dass die Newton-Interpolationspolynome $N_0, \ldots, N_n$ eine Basis von Π_n bilden.

Aufgabe 3 **(2 Punkte)** **(Tschebyscheff-Polynome)**

Die Tschebyscheff-Polynome sind gegeben durch

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad -1 \le t \le 1.$$

a) Beweisen Sie die Rekursionsformel

$$T_{n+1}(t) = 2t\, T_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots$$
$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t$$

und schließen Sie damit, dass T_n ein Polynom n-ten Grades ist

b) Betrachten Sie den Raum der stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)\, g(t)\; dt$$

und der zugehörigen Norm $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Zeigen Sie, daß die Polynome T_n in diesem Raum orthogonal sind.

Programmieraufgaben

Aufgabe 1 **(3 Punkte)** **(Berechnung einer m-fachen Nullstelle)**

a) Für eine Folge $\left\{x^{(j)}\right\}_{j=0}^{\infty}$ die mit Ordnung p gegen x^* konvergiert, gilt

$$\|x^{(j+1)} - x^*\| \le c\|x^{(j)} - x^*\|^p.$$

Häufig ist dabei c und p unbekannt. Zeigen Sie, dass man im Falle von

$$\|x^{(j+1)} - x^*\| \approx c\|x^{(j)} - x^*\|^p.$$

mit Hilfe der Beziehung

$$p = \frac{\log \frac{e^{(j+1)}}{e^{(j+2)}}}{\log \frac{e^{(j)}}{e^{(j+1)}}} \qquad \text{mit } e^{(j)} := \|x^{(j)} - x^*\|$$

die Konvergenzordnung während des Iterationsverlaufes schätzen kann.

b) Implementieren Sie das modifizierte Newton-Verfahren aus Aufgabe 2c) zur Berechnung der Nullstelle $x^* = -1$ der Funktion

$$f(x) = (x+1)^3 \exp(x)$$

mit Startwert $x_0 = 2$. Vergleichen Sie die ersten 20 Schritte der Iteration für $\alpha = 2, 3$ mit dem herkömmlichen Newton-Verfahren, schätzen Sie die Konvergenzraten aller Iterationen nach a) und plotten Sie diese!

Aufgabe 2 **(2 Punkte)** **(Polynominterpolation)**

a) Erstellen Sie ein MATLAB-Skript zur Berechnung der Kondition der Vandermonde-Matrix für den Fall äquidistanter Stützstellen im Intervall $[0, 1]$. Plotten Sie die Kondition in Abhängigkeit von $h = |x_{i+1} - x_i|$ für $n \in [1:5 \quad 9:5:49]$ Intervalle.

b) Modifizieren Sie ihr Skript dahingehend, dass auch das Interpolationspolynom zu den Daten $\sin(2\,\pi\,x)$ berechnet und auf einem feineren(!) Gitter gezeichnet wird. Was beobachten Sie für höhere Polynomgrade?