Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Sommersemester 2009
Prof. Dr. Peter Benner
Dipl.-Math. Jens Saak
Dipl.-Ing. Martin Bernauer

Numerische Mathematik– 4. Hausaufgabe

Abgabetermin: 6./7.5.2009
(in der jeweiligen Übungsgruppe)

Theoretische Aufgaben

Aufgabe 1 (3 Punkte) (Vorwärtsfehleranalyse für Polynomauswertung)

Führen Sie eine Vorwärtsfehleranalyse für die Auswertung des Modell-Polynoms

$$P(x) = c_1\, x + c_2\, x^2$$

a) direkt und

b) mittels Horner-Schema

durch. Betrachten Sie insbesondere den Fall, dass x nahe einer Nullstelle des Polynoms ist und schließen Sie daraus, welches der beiden Schemata im Allgemeinen stabiler ist. Interpretieren Sie mit Hilfe dieser Erkenntnisse noch einmal die Ergebnisse bei der Auswertung des Polynoms

$$P(x) = x^6 - 998x^5 - 998x^4 - 998x^3 - 998x^2 - 998x^1 - 998$$

an der Stelle $x = 999$ (Programmieraufgabe aus Hausaufgabe 2).

Aufgabe 2 (4 Punkte) (Rückwärtsfehleranalyse)

Führen Sie eine Rückwärtsfehleranalyse für die numerische Berechnung des Skalarproduktes zweier Vektoren im $\mathbb{R}^n$ durch.
Hinweis: Zur Vereinfachung können die einzelnen Fehler δ_i mit $|\delta_i| < \mathbf{u}$ (Maschinengenauigkeit) durch ein allgemeines δ ersetzt werden.

Aufgabe 3 (3 Punkte) (Kondition)

Bestimmen Sie absolute und relative Kondition der folgenden Aufgaben:

a) $f(x) = \sin(x)$,

b) $f(x) = \arctan(x)$,

c) $f(x) = \sqrt{x\, \exp(x)},\ x > 0$.

Geben Sie jeweils an, für welche Werte von x die Kondition besonders groß wird.

Programmieraufgaben

Abgabe der Lösung aller Programmieraufgaben in Papierform. Alle selbst erstellten M-Files sind ausgedruckt einzureichen, sowie per Email an `kupa@hrz.tu-chemitz.de` einzuschicken. Erfüllen der Aufgaben mit Matlab ist durch eine Mitschrift der Session (Funktion `diary`) zu belegen. Die für einzelne Aufgaben relevanten Stellen in der Mitschrift sind durch die Aufgabennummer kenntlich zu machen. (Nicht relevante Teile sollten möglichst entfernt werden.)
Als Betreff für die zugesandten Emails ist jeweils `HAn-Numerik-Übungsgruppe-Name1_Name2`
(Beispiel: HAn-Numerik-Saak-Mustermann_Musterfrau)
oder `HAn-Numerik-Übungsgruppe-Hausaufgabengruppenname`
(Beispiel: HAn-Numerik-Bernauer-Die_Epsilons) zu verwenden.

Aufgabe 1 (4 Punkte) (QR-Zerlegung mittels Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)

Implementieren Sie in Matlab die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, mittels der (nicht modifizierten) Gram-Schmidt-Orthogonalisierung wie sie in den letzten Übungsstunden diskutiert wurde. Ihre Funktion sollte die Schnittstelle

```
function [Q,R] = qr_gs(A)
```

haben und den Matlab-Befehl `qr` nicht verwenden.
Testen Sie das Programm mit den Matrizen

$$\textbf{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -2 \\ -\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix}, \quad \textbf{b) } A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$\textbf{c) } A(i) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 6+10^{-i} \end{bmatrix}, \; i = 0, 1, \ldots, 15$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse insbesondere mit der QR-Zerlegung die in Matlab vorimplementiert ist:

```
[Q,R] = qr(A);
```

Berechnen Sie im Fall a) auch mit Matlab die dünne QR-Zerlegung. Was beobachten Sie im Fall c)? Wie kann man dieses Verhalten erklären?
Bemerkung: Zum Vergleich der QR-Zerlegungen kann zum Beispiel das Maß

$$\max_{i,j} |B_{i,j}|$$

für $B = Q$ bzw. $B = R$ verwendet werden.
Zusatz: Implementieren Sie zusätzlich die QR-Zerlegung basierend auf dem modifizierten Gram-Schmidt-Verfahren und testen Sie das Programm ebenfalls mit den obigen Matrizen. Was beobachten Sie nun im Fall c)?

(2 Punkte)

Bemerkung: Ein Beiblatt zur Gram-Schmidt-Orthonormalisierung (in beiden Varianten) kann von der Webseite zur Lehrveranstaltung

http://www-user.tu-chemnitz.de/~saak/lehre/Numerik/SS09/

heruntergeladen werden.