Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Sommersemester 2009
Prof. Dr. Peter Benner
Dipl.-Math. Jens Saak
Dipl.-Ing. Martin Bernauer

Numerische Mathematik– 12. Übung

Aufgabe 1 **(Hermite-Interpolation)**

Für eine Funktion f sei ein Polynom p mit Höchstgrad $2n+1$ gesucht, welches die speziellen Hermiteschen Interpolationsbedingungen

$$p(x_k) = f(x_k), \quad p'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n, \tag{1}$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} V_k(x) f'(x_k)$$

mit

$$U_k(x) = (1 - 2L_k'(x_k)(x - x_k))(L_k(x))^2$$
$$V_k(x) = (x - x_k)(L_k(x))^2$$

die eindeutige Lösung von (1) ist.

Aufgabe 2 **(Bivariate Interpolation)**

Wir nehmen an, dass jedes lineare Interpolationsproblem für die Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eine eindeutige Lösung

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \, \varphi_i(x)$$

hat, die $\Phi(x_k) = f_k$ an den Stellen $x_0, x_1, \ldots, x_n,\ x_i \neq x_j (i \neq j)$, erfüllt.
Zeigen Sie:

a) Ist $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_m$ ein zweiter Satz von Funktionen für den jedes lineare Interpolationsproblem eine eindeutige Lösung hat, dann gilt für jede Stützstellenwahl

$$x_0, x_1, \ldots, x_n,\ x_i \neq x_j (i \neq j), \quad y_0, y_1, \ldots, y_m,\ y_i \neq y_j (i \neq j),$$

und die Werte $f_{ik},\ i = 0, 1, \ldots, n,\ j = 0, 1, \ldots, m$, dass eine eindeutige Funktion der Form

$$\Phi(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_{\nu\mu} \, \varphi_\nu(x) \, \psi_\mu(y)$$

existiert, die die Bedingungen $\Phi(x_i, y_k) = f_{ik},\ i = 0, 1, \ldots, n,\ j = 0, 1, \ldots, m$ erfüllt.

b) Das Interpolationsproblem mit den Stützstellen $(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, 1)$ ist für das polynomiale Tensorprodukt

$$\Phi(x, y) = \sum_{\nu=0}^{1} \sum_{\mu=0}^{1} \alpha_{\nu\mu} \, x^i \, y^j$$

i.A. nicht eindeutig lösbar.