MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR DYNAMIK KOMPLEXER TECHNISCHER SYSTEME MAGDEBURG

M.sc. Patrick Kürschner

Computational Methods in Systems and Control Theory

Telefon: +49 391 6110 424
Fax: +49 391 6110 453

E-Mail:
kuerschner@mpi-magdeburg.mpg.de

www:
http://www.mpi-magdeburg.mpg.de/mpcsc/kuerschner/

18. Januar 2012

Thema für eine Abschlussarbeit

Fachgruppe Computational Methods in Systems and Control Theory

Thema:

Numerische Berechnung von Niedrig-Rang-Darstellungen für bandbegrenzte Gramsche Matrizen

Vorkenntnisse
Numerik, Numerische Lineare Algebra
(empfohlen)

Mathematische System- und Regelungstheorie, Matrixgleichungen, Funktionentheorie
(wünschenswert)

Tätigkeitsbeschreibung
Für lineare zeit-invariante Regelungssysteme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ stellen die unendlichen Gramschen Matrizen

$$P = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{i}\omega I - A)^{-1} BB^T (\mathrm{i}\omega I - A)^{-H} \mathrm{d}\omega,$$

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{i}\omega I - A)^{-H} C^T C (\mathrm{i}\omega I - A)^{-1} \mathrm{d}\omega$$

wichtige systemtheoretische Größen dar. Man kann zeigen, dass für $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}_-$, $P,\ Q$ die Lösungen der Lyapunovgleichungen

$$AP + PA^T = -BB^T, \quad A^TQ + QA = -C^TC$$

sind.

Für große, dünnbesetzte A ist es aus numerischer Sicht oft sinnvoll P und Q nicht direkt, sondern als Niedrig-Rang-Approximationen zu berechnen, d.h. $P \approx RR^T$, $R \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $Q \approx SS^T$, $S \in \mathbb{R}^{n\times s}$ mit $r, s \ll n$. Dafür steht eine Reihe geeigneter Algorithmen zu Verfügung, z.B. die Niedrig-Rang ADI Iteration.

In dieser Arbeit sollen *bandbegrenzte Gramsche Matrizen*

$$P(\omega_1, \omega_2) = P(\omega_2) - P(\omega_1), \quad Q(\omega_1, \omega_2) = Q(\omega_2) - Q(\omega_1) \tag{1a}$$

$$\text{mit } P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} (\mathrm{i}\omega I - A)^{-1} B B^T (\mathrm{i}\omega I - A)^{-H} \mathrm{d}\omega, \tag{1b}$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} (\mathrm{i}\omega I - A)^{-H} C^T C (\mathrm{i}\omega I - A)^{-1} \mathrm{d}\omega \tag{1c}$$

$$\text{für } -\infty < \omega_1 < \omega_2 < \infty, \tag{1d}$$

deren Darstellung durch Lyapunovgleichungen, sowie die approximative Lösung dieser Matrixgleichungen durch Niedrig-Rang-Faktoren untersucht werden.

Dies beinhaltet auch die Implementierung der numerische Berechnung dieser Niedrig-Rang-Faktoren mit, z.B., der Niedrig-Rang ADI.

Als besondere Schwierigkeit kommt hinzu, dass die Darstellung von (1) mittels Matrixgleichungen zusätzlich den matrixwertigen Logarithmus

$$\ln\left((\mathrm{i}\omega I + A)(-\mathrm{i}\omega I + A)^{-1}\right)$$

benötigt, dessen Berechnung bzw. numerische Approximation ebenfalls betrachtet werden muss.

Abschluss
Master oder Diplom

Arbeitsbereich
Matrixgleichungen, Regelungstheorie

Kontakt

	M.sc. Patrick Kürschner	Prof. Peter Benner
Telefon	+49 391 6110 424	+49 391 6110 450
Email	kuerschner@mpi-magdeburg.mpg.de	benner@mpi-magdeburg.mpg.de

Literatur

- A. C. Antoulas
  Approximation of Large-Scale Dynamical Systems;
  SIAM 2005.
- J. Saak,
  Efficient Numerical Solution of Large Scale Algebraic Matrix Equations in PDE Control and Model Order Reduction;
  Dissertation, TU Chemnitz, 2009.
- W. Gawronski, J.N. Juang
  Model reduction in limited time / frequency intervals.;
  Int. Journal of Systems Science, Vol. 21, S. 249-376, 1990.